



Případová studie 2

Základní informace

Název výzkumné jednotky	Využití exponenciálních funkcí
Autor jednotky	BORG Deutsch-Wagram (Rakousko)
Vychází z konceptu výukové jednotky	Exponenciální modely v běžném životě
Autor konceptu výukové jednotky	Škola da Vinci (Česká republika)
Datum výuky	20. 11. 2023
Počet žáků ve třídě	11
Počet žáků s OMJ	1

1. Popis výzkumné výukové jednotky

Název	Využití exponenciálních funkcí
Věk	16 let
Délka jednotky	1 hodina
Matematický obsah	Nelineární funkce
Předpokládané znalosti	<ul style="list-style-type: none">• Vlastnosti exponenciálních funkcí• Interpretace grafů
Pomůcky	<ul style="list-style-type: none">• Pracovní list „Využití exponenciálních funkcí“ (1 výtisk pro každého žáka)• Kartičky „Růst a pokles“ (několik kopií, ideálně laminovaných)• Případně: kalkulačka
Očekávané výstupy	Žák: <ul style="list-style-type: none">• aplikuje exponenciální funkce při řešení úloh z reálného světa;• upevňuje si znalosti o exponenciálních funkcích;• pracuje s matematickými modely v reálných situacích.
Poznámky pro práci se žáky s OMJ	

Plán hodiny:

Před začátkem hodiny je třeba kartičky rozmístit na několik míst ve třídě. Na každém stanovišti musí být kompletní sada kartiček. Tato místa slouží jako „pomocná stanoviště“, kde mohou žáci vyhledávat informace, které jim pomohou vyřešit úkoly z pracovního listu.

čas	metody	Obsah a komentář
ca 10 min	Úvodní výklad a interakce učitel – žáci	Učitel motivuje žáky k tématu hodiny a popisuje význam exponenciálních funkcí v běžném životě. Učitel spolu s žáky zopakuje hlavní pojmy a vlastnosti exponenciálních funkcí.
ca 25 min	Práce ve dvojicích	Žáci řeší úlohy v pracovním listu ve dvojicích. V případě potřeby jim učitel poskytuje pomoc.
ca 10 min	Interakce učitel – žáci	Porovnání výsledků

Využití exponenciálních funkcí – pracovní list

Saranče jsou hmyz, který je rozšířen v mnoha zemích světa.

Existuje mnoho druhů sarančat a kobylek. Pro všechny je společné, že mají silné zadní nohy, které jim umožňují skákat.



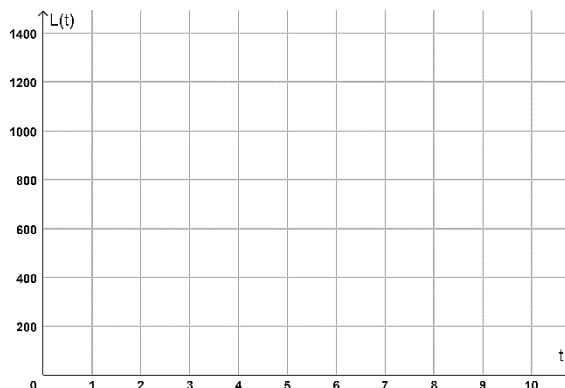
Larvy sarančat se líhnou začátkem jara, když se oteplí. Živí se mladými výhonky rostlin a stromů. Populace sarančat se exponenciálně zvyšuje, když jsou pro ně ideální podmínky.

Úloha 1:

Začátkem jara je ve zkoumané oblasti napočítáno 100 sarančat druhu A.

Předpokládá se, že jejich počet v příštích dnech poroste o 45 % denně. Doba od začátku jara je uvedena jako t ve dnech a celkový počet kobylek jako $L(t)$.

- a) Vytvořte grafické znázornění vývoje populace sarančete během jednoho týdne. Zapište si vypočítané hodnoty každého jednotlivého dne.



- b) Sestavte rovnici pro funkci $L(t)$ ve tvaru $L(t) = L_0 \cdot a^t$.
- c) Vypočítejte, kdy se populace sarančat zvýší osminásobně a zkontrolujte svůj výsledek pomocí grafu z úlohy a). Vypočítanou hodnotu označte v úloze a).

Úloha 2:

Ve stejné oblasti bylo dva dny po začátku jara napočítáno 20 sarančat druhu B. O osm dní později se počítání zopakovalo a bylo napočítáno 47 sarančat. Doba od začátku jara ve dnech je označena t , celkový počet sarančat druhu B je označen $H(t)$.

- a) Sestavte rovnici pro $H(t)$ ve tvaru $H(t) = H_0 \cdot e^{\lambda t}$.
- b) Určete, o kolik procent se populace sarančat zvětší za jeden den.
- c) Určete, o kolik procent se populace sarančat zvětší za jednu hodinu.

Využití exponenciálních funkcí – pracovní list se řešením

Saranče jsou hmyz, který je rozšířen v mnoha zemích světa.

Existuje mnoho druhů sarančat a kobylek. Pro všechny je společné, že mají silné zadní nohy, které jim umožňují skákat.



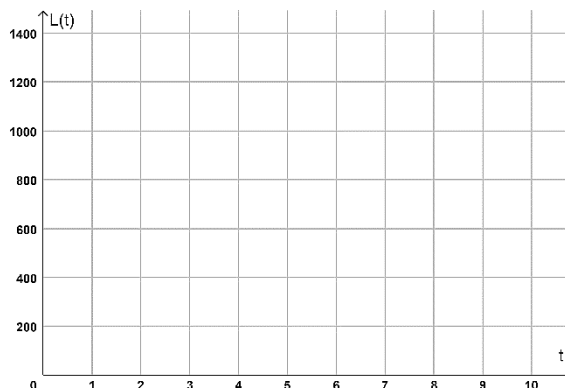
Larvy sarančat se líhnou začátkem jara, když se oteplí. Živí se mladými výhonky rostlin a stromů. Populace sarančat se exponenciálně zvyšuje, když jsou pro ně ideální podmínky.

Úloha 1:

Začátkem jara je ve zkoumané oblasti napočítáno 100 sarančat druhu A.

Předpokládá se, že jejich počet v příštích dnech poroste o 45 % denně. Doba od začátku jara je uvedena jako t ve dnech a celkový počet kobylek jako $L(t)$.

- a) Vytvořte grafické znázornění vývoje populace sarančete během jednoho týdne. Zapište si vypočítané hodnoty každého jednotlivého dne.



- b) Sestavte rovnici pro funkci $L(t)$ ve tvaru $L(t) = L_0 \cdot a^t$.
- c) Vypočítejte, kdy se populace sarančat zvýší osminásobně a zkontrolujte svůj výsledek pomocí grafu z úlohy a). Vypočítanou hodnotu označte v úloze a).

$$\begin{aligned}8 \cdot 100 &= 100 \cdot 1,45^t && |:100 \\8 &= 1,45^t && |\log \square \\ \log(8) &= t \cdot \log(1,45) && |: \log(1,45) \\ t &= \frac{\log(8)}{\log(1,45)} \cong 5,60 \text{ days}\end{aligned}$$

Úloha 2:

Ve stejné oblasti bylo dva dny po začátku jara napočítáno 20 sarančat druhu B. O osm dní později se počítání zopakovalo a bylo napočítáno 47 sarančat. Doba od začátku jara ve dnech je označena t , celkový počet sarančat druhu B je označen $H(t)$.

- a) Sestavte rovnici pro $H(t)$ ve tvaru $H(t) = H_0 \cdot e^{\lambda \cdot t}$.
- b) Určete, o kolik procent se populace sarančat zvětší za jeden den.
- c) Určete, o kolik procent se populace sarančat zvětší za jednu hodinu.

Dva dny po začátku jara máme: $H(2) = 20$. O osm dní později máme: $H(10) = 47$

$$H(10) = H(2) \cdot a^8 \rightarrow 47 = 20 \cdot a^8 \rightarrow a = \sqrt[8]{\frac{47}{20}} \cong 1,1127$$

$$H(2) = H(0) \cdot a^2 \rightarrow H(0) = \frac{H(2)}{a^2} = \frac{20}{1,1127^2} \cong 16 \text{ sarančat}$$

$$\text{Rovnice: } H(t) = 16 \cdot 1,1127^t$$

$$a = e^\lambda \rightarrow 1,1127 = e^\lambda \rightarrow \lambda = \ln(1,1127) \cong 0,1068$$

$$\text{Rovnice: } H(t) = 16 \cdot e^{0,1068 \cdot t} \quad \dots \text{ řešení úlohy a)}$$

Řešení úlohy b): Populace sarančat roste o 11,27% za den.

Řešení úlohy c): $1,1127^{\frac{1}{24}} \cong 1,0045$ Populace sarančat roste o 0,45% za hodinu.

Kartičky k zalaminování:

Zákony růstu a poklesu:

Exponenciální funkce mohou mít libovolný kladný základ. V přírodních vědách se často používá Eulerovo číslo e . Kromě obecného zápisu $f(x) = c \cdot a^x$ se také často používá $f(x) = c \cdot e^{\lambda x}$ kde $\lambda \in \mathbb{R}$.

	Exponenciální růst	Exponenciální pokles
Libovolný základ a	$N(t) = N_0 \cdot a^t$ kde $a > 1, t \geq 0$ a se nazývá faktor růstu.	$N(t) = N_0 \cdot a^t$ kde $0 < a < 1, t \geq 0$ a se nazývá faktor poklesu.
Základ e	$N(t) = N_0 \cdot e^{+\lambda t}$ kde $\lambda > 0, t \geq 0$ λ se nazývá konstantou růstu.	$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$ kde $\lambda > 0, t \geq 0$ λ se nazývá konstantou poklesu.

λ ... „lambda“, písmeno řecké abecedy

Příklady:

	Exponenciální růst	Exponenciální pokles
Libovolný základ a	$N(t) = 20 \cdot 1.23^t$	$N(t) = 20 \cdot 0.23^t$
Základ e	$N(t) = 20 \cdot e^{0,4 t}$	$N(t) = 20 \cdot e^{-0,4 t}$

Důležité:

- **Původní hodnota se značí N_0** , což znamená: $N_0 = N(t = 0)$

Jak moc se hodnota mění za jednotku času, lze odečíst pouze ze zákona růstu a poklesu, pokud je ve tvaru $f(x) = c \cdot a^x$ nebo $N(t) = N_0 \cdot a^t$.

Vzorová úloha 1:

Vyjádřete zákon růstu $N(t) = 1500 \cdot 1,05^t$ s použitím základu e .

Dva tvaru zákonu růstu jsou:

$$N(t) = N_0 \cdot a^t \text{ a } N(t) = N_0 \cdot e^{+\lambda t}$$

Pokud je porovnáme, vidíme, že

$a = e^\lambda$. Sem lze nyní dosadit čísla z úlohy.

$$a = e^\lambda \quad / \text{ Dosadte } a = 1,05$$

$$1,05 = e^\lambda \quad / \ln$$

$$\ln(1,05) = \lambda \cdot \underbrace{\ln(e)}_{=1}$$

$$\ln(1,05) = \lambda \quad / \text{ Vypočítejte } \ln(1.05)$$

$$0,049 \approx \lambda$$

Zákon o růstu (se základem e) nyní je:

$$N(t) = 1500 \cdot e^{0,049 \cdot t}$$

Vzorová úloha 2:

Veličina roste podle zákona růstu $N(t) = 490 \cdot e^{0,04879 \cdot t}$, kde t měříme v letech. O kolik procent se veličina zvýší ročně?

Pokud chceme zjistit, o kolik procent se veličina zvýší za rok, musíme použít vzorec $N(t) = N_0 \cdot a^t$. Jenom zde můžeme vyčíst procenta.

Tyto dva tvaru musíme porovnat, konkrétně: $N(t) = N_0 \cdot a^t$ a

$$N(t) = N_0 \cdot e^{+\lambda t}$$

Pokud je porovnáme, vidíme, že $a = e^\lambda$. Sem lze nyní dosadit čísla z úlohy.

Zákon o růstu (se základem a) nyní je:

$$a = e^\lambda \quad / \text{ Dosadte } e^{0,04879}$$

$$a = e^{0,04879} \quad / \text{ Vypočítejte } e^{0,04879}$$

$$a \approx 1,05$$

$$N(t) = 490 \cdot 1,5^t$$

Z této rovnice lze vyčíst, že **veličina roste o 5 % ročně**.

Sestavení zákona o růstu a poklesu s využitím dvou známých hodnot

Vzorová úloha:

Zásoba dřeva v lese byla v roce 2005 odhadována na 150 000 metrů krychlových. O pět let později, v roce 2010, byl odhad 168 000 metrů krychlových. Předpokládá se, že zásoby rostou exponenciálně. Sestave zákon růstu pro zásoby dřeva h , kde $h(t) = h_0 \cdot a^t$ jako funkci počtu let t , které uplynuly od roku 2000.

Krok 1: Výpočet parametru a

Ze zadání víme, že $t = 0$ značí rok 2000 ($h_0 = h(0)$).

Známe také dvě hodnoty:

Zásoba dřeva v roce 2005 je 150 000 m³ → $h(5) = 150\,000$

Zásoba dřeva v roce 2010 je 168 000 m³ → $h(10) = 168\,000$

Využijeme hodnoty $h(5)$ a $h(10)$ a vzorec

$f(x+h) = f(x) \cdot a^h$, abychom získali parametr a .

Poznámka: Při řešení úloh z pracovního listu zaokrouhľujte parametr a na 4 desetinná místa, pokud není uvedeno jinak.

$$h(5) = 150\,000$$

$$h(10) = 168\,000$$

$$h(10) = h(5) \cdot a^5$$

$$168\,000 = 150\,000 \cdot a^5$$

$$a^5 = \frac{168\,000}{150\,000}$$

$$a = \sqrt[5]{\frac{168\,000}{150\,000}}$$

$$a \approx 1,0229$$

Krok 2: Výpočet hodnoty h_0

Pro výpočet h_0 opět využijeme vlastnost

$f(x+h) = f(x) \cdot a^h$.

$h(0)$ zjistíme, pokud dosadíme známé hodnoty.

Zaokrouhlíme na celá čísla, protože zadání úlohy vyžaduje práci s celými čísly.

$h(0) \approx 133945$ udává zásoby dřeva v roce 2000.

$$h(5) = h(0) \cdot a^5$$

$$150\,000 = h(0) \cdot 1,0229^5$$

$$\frac{150\,000}{1,0229^5} = h(0)$$

$$h(0) \approx 133945$$

Krok 3: Sestavení zákona růstu

Úloha vyžaduje, abychom využili tvar $h(t) = h_0 \cdot a^t$. Pokud dosadíme hodnoty h_0 a a , které jsme vypočítali, můžeme sestavit zákon růstu:

$$h(t) = h_0 \cdot a^t$$

Zákon růstu:

$$h(t) = 133\,945 \cdot 1,0229^t$$

Výpočet hodnoty t v exponentu

Vzorová úloha:

Každou hodinu roste bakteriální kultura o 80 %. Na začátku se skládá z 800 bakterií.

Spočítejte, **kdy** se počet bakterií zvýšil **desetkrát**!

Krok 1: Sestavení zákonu růstu

Protože bakteriální kultura roste o 80 %, musíme násobit faktorem 1,80 každou hodinu. Takže hledaný parametr je

$$a = 1,80 \text{ (Vysvětlení: } 100\% + 80\% = 180\% = \frac{180}{100} = 1,80)$$

Protože na začátku máme 800 bakterií, získáme: $N_0 = 800$

$$N(t) = N_0 \cdot a^t$$

Zákon růstu:

$$N(t) = 800 \cdot 1,80^t$$

Krok 2: Výpočet času t , kdy počet bakterií naroste desetinásobně → hledáme exponent t → musíme použít logaritmus.

Na počátku máme 800 bakterií. Pokud se jejich počet zdesetinásobí, máme $10 \cdot 800$ bakterií → $N(t) = 10 \cdot 800$

Abychom zjistili čas t , musíme dosadit $10 \cdot 800$ do zákona růstu. Pak určíme t .

Je vidět, že čas t je nezávislý na počáteční hodnotě počtu bakterií.

Záleží pouze na faktoru růstu a !

$$N(t) = 8000 \quad \text{und}$$

$$N(t) = 800 \cdot 1,80^t$$

$$10 \cdot 800 = 800 \cdot 1,80^t \quad | :800$$

$$10 = 1,80^t \quad | \log$$

$$\log(10) = \log(1,80^t)$$

$$\log(10) = t \cdot \log(1,80) \quad | : \log(1,80)$$

$$t = \frac{\log(10)}{\log(1,80)}$$

$$t \approx 3,92 \text{ h}$$

2. Analýza následného rozhovoru

Učitelka, která odučila tuto jednotku, má více než 30 let pedagogické praxe. Jejím druhým předmětem je zeměpis. Neabsolvovala žádné zvláštní školení k výuce žáků s OMJ.

Učitelka zmiňovala zejména motivační účinek, který tato vyučovací jednotka na žáky měla. Popsala žáky v této třídě jako „nemotivované“, což bylo jasně vidět v prvních minutách hodiny, kdy se diskutovalo o chování žáků (zřejmě ne poprvé). Při představování tématu a prezentaci ukázkové úlohy se motivace zdánlivě příliš nezlepšila. Jakmile však žáci dostali pracovní listy a začali pracovat na jednotlivých úlohách, motivace značně vzrostla a žáci pracovali s nadšením. Učitelka poznamenala, že ji to překvapilo, a domnívala se, že je to díky kontextu jednotky a díky tomu, že jde o úlohy z reálného světa.

Učitelka hovořila o tom, že je tento materiál vhodná na opakování exponenciálních funkcí, což žákům pomůže lépe se připravit na závěrečnou zkoušku (na konci školního roku). Poznamenala, že žáci by se pravděpodobně tématem tolik nezabývali, pokud by opakování mělo podobu procvičování rovnic nebo použila „standardní kontext“ radioaktivního rozpadu.

3. Doporučení na zlepšení

Učitel žádné konkrétní změny nedoporučila. Jen poznamenala, že by možná stálo za to přehodit pořadí dílčích úloh a) a b), protože výpočet bodů v grafu je pravděpodobně snazší, pokud je již dopředu znám předpis funkce.