



Případová studie 7

Základní informace

Název výzkumné jednotky	Matematika v květinovém záhoně
Autor jednotky	BORG Deutsch-Wagram (Rakousko)
Vychází z konceptu výukové jednotky	Zelená geometrie
Autor konceptu výukové jednotky	Istituto Comprensivo Statale "Malaspina" Massa (Itálie)
Datum výuky	13. 05. 2024
Počet žáků ve třídě	11
Počet žáků s OMJ	1

1. Popis výzkumné výukové jednotky

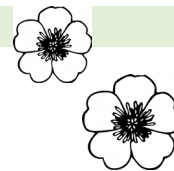
Název	Zelená geometrie 2 (Matematika v květinovém záhoně)
Věk	17-18 let
Délka jednotky	1 x 45 minut (až 2 x 45 minut)
Matematický obsah	Využití diferenciálního počtu a integrálu
Předpokládané znalosti	<ul style="list-style-type: none">• Sestavení rovnice polynomicke funkce s danými funkčními hodnotami• Derivace polynomiálních funkcí• Integrace polynomiálních funkcí• Interpretace integrálu jako plochy pod grafem
Pomůcky	<ul style="list-style-type: none">• Pracovní list 1
Očekávané výstupy	<p>Žák:</p> <ul style="list-style-type: none">• aplikuje znalosti o vlastnostech polynomiálních funkcí v praktických situacích reálného života• používá polynomiální funkce k modelování reálných objektů• aplikuje derivace a integraci v kontextu reálného života.
Poznámky pro práci se žáky s OMJ	<ul style="list-style-type: none">• Žáci (obzvláště žáci z OMJ) mohou do hodiny přinést obrázky záhonů a zahrad v zemích jejich původu.

Plán hodiny:**1. hodina (45 minut)**

Čas	Metoda	Obsah a komentář
ca. 5 min	Výklad a komunikace učitel – žáci	Učitel žáky motivuje k tématu a vysvětluje jeho význam v každodenním životě.
ca. 30 min	Práce ve dvojicích nebo v malých skupinách	Žáci ve dvojicích či trojicích řeší úlohy v pracovním listu. Učitel prochází po třídě a pomáhá v případě potřeby.
ca. 10 min	Komunikace učitel – žáci	Porovnání výsledků

Pokud třídu velmi zaujmou úkoly z této hodiny, mohou se věnovat v úloze 4, a to buď ještě v rámci 1: hodiny, nebo po jejím skončení v následující hodině.

Pracovní list 1 – Matematika v květinovém záhonu



V obdélníkové zahradě máme založit květinový záhon.

Tvar květinového záhonu je dán funkcí f , kde x je šířka záhonu v metrech a $f(x)$ je výška záhonu v metrech.

Úloha 1:

Zahradník navrhne záhon tak, že záhon začíná na okrajích zahrady a dosahuje maximální výšky ve středu zahrady. Zákazník upozorňuje, že záhon by měl mít maximální „výšku“ tři metry. Dále víme, že funkce f je definována pouze pro $0 \leq x \leq 10$.

- a) Vytvořte náčrt zahrady se záhonem a popište ho.

Místo pro náčrt:

- b) S pomocí výše uvedených údajů určete tvar polynomicke funkce f , která popisuje tvar záhonu v zahradě. K tomu použijte následující vlastnosti.

	Slovní popis	Matematický popis
1)	Záhon začíná v rozích zahrady. Rohy jsou v $x = \underline{\hspace{2cm}}$ a $x = \underline{\hspace{2cm}}$.	I: $\underline{\hspace{2cm}}$ II: $\underline{\hspace{2cm}}$
2)	Záhon má nejvyšší výšku ve středu zahrady. Střed zahrady je v $x = \underline{\hspace{2cm}}$.	III: $\underline{\hspace{2cm}}$
3)	Zákazník požaduje, aby měl záhon maximální „výšky“ 3 metry.	IV: $\underline{\hspace{2cm}}$

Nejprve promyslete stupeň polynomicke funkce, který je pro tento návrh květinového záhonu nejlepší a nejjednodušší.

Polynomicke funkce stupně ____: Obvykle se zapisuje jako: $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

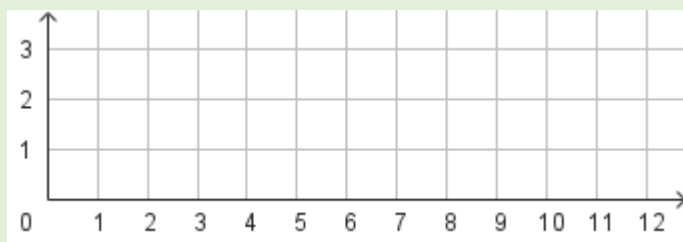
Určete polynomicke funkci, která popisuje záhon. Níže popište, jak jste dosáhli svého výsledku.

Polynomicke funkce je dána předpisem: $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

Úloha 2:

Zakreslete polynomicickou funkci, která popisuje záhon v daném systému souřadnic.

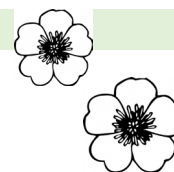
Odhadněte skutečnou plochu záhonu s pomocí horních a dolních součtů (s 5 stejnými intervaly).



Úloha 3:

Určete přesnou rozlohu záhonu.

Pracovní list 1 – řešení



V obdélníkové zahradě máme založit květinový záhon.

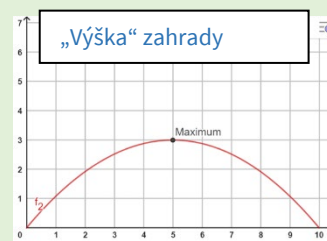
Tvar květinového záhonu je dán funkcí f , kde x je šířka záhonu v metrech a $f(x)$ je výška záhonu v metrech.

Úloha 1:

Zahradník navrhne záhon tak, že záhon začíná na okrajích zahrady a dosahuje maximální výšky ve středu zahrady. Zákazník upozorňuje, že záhon by měl mít maximální „výšku“ tři metry. Dále víme, že funkce f je definována pouze pro $0 \leq x \leq 10$.

- a) Vytvořte náčrtek zahrady se záhonem a popište ho.

Místo pro náčrtek:



- b) S pomocí výše uvedených údajů určete tvar polynommické funkce f , která popisuje zahradu. K tomu použijte následující vlastnosti.

	Slovní popis	Matematický popis
1)	Záhon začíná v rozích zahrady. Rohy jsou v $x = \underline{\hspace{2cm}}$ a $x = \underline{\hspace{2cm}}$.	I: $f(0) = 0$ II: $f(10) = 0$
2)	Záhon má nejvyšší výšku ve středu zahrady. Střed zahrady je v $x = \underline{\hspace{2cm}}$.	III: $f'(5) = 0$
3)	Zákazník požaduje, aby měl záhon maximální „výšku“ 3 metry.	IV: $f(5) = 3$

Nejprve promyslete stupeň polynommické funkce, který je pro tento návrh květinového záhonu nejlepší a nejjednodušší.

Polynommická funkce stupně 2: Obvykle se zapisuje jako: $f(x) = \underline{ax^2 + bx + c}$

Určete polynommickou funkci, která popisuje záhon. Níže popište, jak jste dosáhli svého výsledku.

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{und} \quad f'(x) = 2ax + b$$

$$\begin{aligned} \text{I: } f(0) &= 0 & a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c &= 0 & \rightarrow c &= 0 \\ \text{II: } f(10) &= 0 & a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c &= 0 & \rightarrow 100a + 10b &= 0 \\ \text{III: } f'(5) &= 0 & 2 \cdot a \cdot 5 + b &= 0 & \rightarrow 10a + b &= 0 \\ \text{IV: } f(5) &= 3 & a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c &= 3 & \rightarrow 25a + 5b &= 3 \end{aligned}$$

Z rovnic III a IV sestavíme tuto soustavu rovnic:

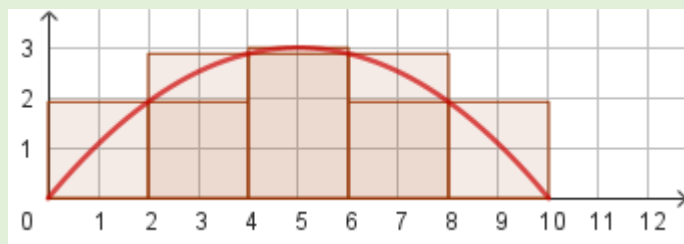
$$\begin{aligned} \text{III: } 10a + b &= 0 & | \cdot (-5) & & -25a &= 3 & | : (-25) & \rightarrow a = -\frac{3}{25} \\ \text{IV: } 25a + 5b &= 3 & & & & & & \\ \text{III: } -50a - 5b &= 0 & & & 10a + b &= 0 & | -b & \rightarrow b = \frac{30}{25} = \frac{6}{5} \\ \text{IV: } 25a + 5b &= 3 & & & 10a &= -b & & \end{aligned}$$

Polynommická funkce je daná předpisem $f(x) = -\frac{3}{25}x^2 + \frac{6}{5}x$

Úloha 2:

Zakreslete polynomickou funkci, která popisuje záhon v daném systému souřadnic.

Odhadněte skutečnou plochu záhonu s pomocí horních a dolních součtů (s 5 stejnými intervaly).



Pro odhad plochy pomocí horního a dolního součtu jsou potřeba některé funkční hodnoty, jejichž hodnoty jsou uvedeny v následující tabulce hodnot (zaokrouhlené).

x	0	2	4	5	6	8	10
$f(x)$	0	1.92	2.88	3	2.88	1.92	0

Dolní součet: $L_5 = 2 \cdot [f(0) + f(2) + f(4) + f(8) + f(10)]$
 $L_5 \approx 13.44$

Horní součet: $U_5 = 2 \cdot [f(2) + f(4) + f(5) + f(6) + f(8)]$
 $U_5 \approx 25.2$

Úloha 3:

Určete přesnou rozlohu záhonu.

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{10} f(x) dx = \int_0^{10} \left(-\frac{3}{25}x^2 + \frac{6}{5}x \right) dx = \left(-\frac{3x^3}{25 \cdot 3} + \frac{6x^2}{5 \cdot 2} \right) \Big|_0^{10} \\ &= \left(-\frac{3 \cdot 10^3}{25 \cdot 3} + \frac{6 \cdot 10^2}{5 \cdot 2} \right) - \left(-\frac{3 \cdot 0^3}{25 \cdot 3} + \frac{6 \cdot 0^2}{5 \cdot 2} \right) = (-40 + 60) = 20 \end{aligned}$$

Skutečná rozloha záhonu je 20m².





★ Úloha 4:

Aby byla plocha zahrady využita co nejlépe, si zákazník klade otázku, co je optimální šířka x pozemku, aby došlo k maximalizaci celkové plochy záhonu na zahradě. Určete optimální šířku a srozumitelným způsobem popište, jak jste to udělali.

2. Analýza následného rozhovoru

Učitelka, která vyučovala tuto jednotku, má 7 let pedagogické praxe. Jejím druhým předmětem je fyzika. V rámci svého vzdělávání neprošla žádným kurzem zaměřeným na výuku žáků s OMJ.

Učitelka zmínila, že ačkoli kontext úloh neodpovídá tomu, co by skutečný zahradník dělal, přesto se jí práce s těmito úlohami líbila. Žáky bavil „neobvyklý kontext“. Jsou zvyklí na grafy funkcí bez kontextu nebo na standardní optimalizační úlohy.

Učitelka hovořila o tom, že tato aktivita se hodí do přípravy k maturitě, kde bývají zařazeny úlohy s výpočtem plochy a použitím grafů. Zmínila, že nejprve váhala, zda použít tento nestandardní kontext v tomto materiálu, ale uvedla, že nakonec byly matematické postupy stejné jako v jiných běžných hodinách, pouze v kontextu, který byl pro žáky zajímavější.

Pro výpočty dolního a horního součtu v úloze 2 a také pro kontrolu výsledků úloh 1 a 3 učitelka použila GeoGebru. Obecně hovořila o tom, že digitální technologie nejsou v této jednotce dostatečně využity a navrhla by přidat další úkoly, kde by žáci měli možnost technologie používat, nebo by změnila již vytvořené úlohy tak, aby žáci mohli pracovat s technologiemi, a to i s ohledem na blížící se maturitu.

Učitelka také dodala, že by bylo hezké případně využít při práci na úloze 1 pozemek mimo školu, aby žáci vytvořili „náčrt zahrady ze skutečného světa“.

3. Doporučení na zlepšení

Učitelka, která jednotku odučila, navrhla několik zlepšení:

Zprvé by se podle ní měly použít digitální technologie, konkrétně software pro dynamickou geometrii. Hlavně u úlohy 2 (výpočet horního a dolního součtu) podle ní nedochází k rozvoji dovedností žáků, pokud výpočet dělají na papír. Takové úlohy už žáci řešili a vědí, jak na to. Zde jde o aplikační úlohu a výpočty bez digitálních technologií žáky zdržují a snižují jejich motivaci.

Dále navrhla, aby hodina proběhl venku, mimo školní budovu. Žáci by pak mohli udělat náčrt skutečné zatravněné plochy a na ní vytvořit vlastní záhon. Domnívá se, že by to pro žáky bylo velmi motivující, protože by využili vyšší matematiku při řešení úlohy mimo školu, což by jim ukázalo, že žijeme obklopeni matematikou.