



Fallstudie 06

Grundlegende Daten

Titel der Unterrichtseinheit	Ebene Darstellung von Festkörpern
Einheit entwickelt von	BORG Deutsch-Wagram (AT)
Basierend auf dem Konzept	Isometrien in der Ebene
Konzept entwickelt von	Fondazione A.R.E.A. (IT)
Unterrichtsdatum	22.03.2024
Anzahl der Schüler*innen	18
Anzahl der Schüler*innen mit Migrationshintergrund	7

1. Beschreibung der Unterrichtseinheit

Titel	Ebene Darstellung von Festkörpern
Alter der Schüler*innen	13/14 Jahre
Dauer der Einheit	3 x 50 Minuten
Mathematisches Thema	Geometrische Körper
Vorwissen der Schüler*innen	<ul style="list-style-type: none">• Eigenschaften von Körpern (Würfel, verschiedene Arten von Prismen, Zylinder, Pyramide, Kegel, Kugel)
Benötigte Materialien	<ul style="list-style-type: none">• Merkblatt 1 (für die erste Unterrichtseinheit)• Aufgabenblatt 1 (für die erste Unterrichtseinheit)• Aufgabenblatt 2 (für die zweite Unterrichtseinheit)• Merkblatt 2 (für die dritte Unterrichtseinheit)• Aufgabenblatt 3 (für die dritte Unterrichtseinheit)
Ziele	Die Schüler*innen ... <ul style="list-style-type: none">• wissen die Formeln für den Oberflächeninhalt und das Volumen von Würfel, Quader, Zylinder, quadratischer Pyramide, Kegel, und Kugel• können den Schrägriss eines Würfels und eines Quaders bei gegebenem Verzerrungswinkel und gegebenem Verkürzungsfaktor
Bemerkungen zum Arbeiten mit Schüler*innen mit Migrationshintergrund	<ul style="list-style-type: none">• Bei Aufgabe 4 sollen Schüler*innen mit und ohne Migrationshintergrund ein typisches Objekt aus ihrem Ursprungsland (oder dem ihrer Familie) präsentieren, dass die Form eines bereits besprochenen geometrischen Körpers hat. Die Schüler*innen können das Objekt kurz vorstellen und erzählen, warum sie sich für dieses Objekt entschieden haben.

Unterrichtsplanung

Erste Unterrichtseinheit (50 Minuten):

Zeit	Inhalt und Anmerkungen	Sozialform
30 Minuten	Wiederholung der Eigenschaften von geometrischen Körpern; Reale Gebäude werden recherchiert; Verbindung zur Mathematik wird hergestellt (siehe Aufgabe 1)	Erarbeitung zunächst in Kleingruppen, anschließende Präsentation der Ergebnisse im Plenum (Schüler können zum Beispiel über einen Beamer das gewählte Gebäude einblenden)
20 Minuten	Vermittlung neuer Inhalte (Schwerpunkt Schrägriss, Oberfläche und Volumen von Quader und Würfel) (siehe 1. Kästchen „MERKE“)	Erklärungen durch den Lehrer an der Tafel; Schüler-Lehrer-Gespräch;

Zweite Unterrichtseinheit (50 Minuten):

Zeit	Inhalt und Anmerkungen	Sozialform
20 Minuten	Lösen von Aufgabe 2	Gemeinsam im Plenum; Schüler-Lehrer-Gespräch
30 Minuten	Lösen von Aufgabe 3	Partnerarbeit; Lehrer geht durch Klasse und überprüft den Schrägriss; gemeinsame Kontrolle von Oberfläche und Volumen im Plenum; Diskussion über die ausgewählten Gegenstände

Hausübung: Jeder Schüler soll sich ein typisches Mitbringsel aus seinem Heimatland überlegen, welches einen geometrischen Körper darstellt. Ebenso sollen die Maße dieses Gegenstandes herausgefunden werden (z.B. durch Internet oder durch Abmessen des Gegenstandes zuhause, wenn beides nicht möglich ist, sollen die Schüler realistische Maße erfinden). Die Schüler dürfen gerne ein Foto des Gegenstandes machen oder sogar die ausgewählten Mitbringsel in den Unterricht mitnehmen.

Dritte Unterrichtseinheit (50 Minuten):

Zeit	Inhalt und Anmerkungen	Sozialform
20 Minuten	Lösen von Aufgabe 2	Gemeinsam im Plenum; Schüler-Lehrer-Gespräch
30 Minuten	Lösen von Aufgabe 3	Partnerarbeit; Lehrer geht durch Klasse und überprüft den Schrägriss; gemeinsame Kontrolle von Oberfläche und Volumen im Plenum; Diskussion über die ausgewählten Gegenstände

Arbeitsblatt 1

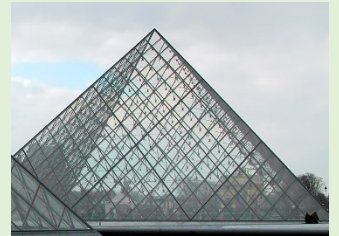
Aufgabe 1 (zuerst in der Kleingruppe, im Anschluss im Plenum):

Jeder Schüler der Gruppe überlegt sich von seinem Geburtsland ein Gebäude/eine Sehenswürdigkeit, das/die geometrische Körper beinhaltet! Die auftretenden geometrischen Körper sollen auch benannt werden! Der Einsatz des Internets ist dabei erlaubt! Ebenso soll jeder Schüler sein Gebäude in 2-3 Sätzen kurz erklären.

Hinweis: Sollten alle (oder die meisten) Schüler der Gruppe das gleiche Geburtsland haben, so können Schüler Länder wählen, die sie bereits besucht haben.

Beispiele:

- a) Franz-von-Assisi-Kirche in Wien (die Turmspitzen stellen Kegeln dar!)
liegt direkt an der Donau am Mexikoplatz.
Ihr Grundstein wurde zum 50-jährigen Thron-Jubiläum von Kaiser Franz Josef gelegt. Sie ist eine römisch-katholische Pfarrkirche.
- b) Glaspypamide in Paris dient als Haupteingang für das
Museum des Louvre in der französischen
Hauptstadt Paris.



Merkblatt 1

MERKE:

Der Schwerpunkt liegt nun auf der Erstellung eines Schrägrisses, sowie auf der Berechnung von Oberfläche und Volumen eines Würfels und Quaders:

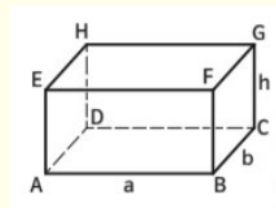
Eine Zeichnung gibt einen Körper immer nur aus einem Blickwinkel wieder. Der Körper, also ein räumlicher Gegenstand, wird als flächige Figur auf dem Zeichenpapier dargestellt. Um eine räumliche Wirkung in der Zeichnung zu erreichen, verwendet man oft den sogenannten Schrägriss. Bei dieser Art der Darstellung bekommen einzelne Flächen und Kanten des Körpers andere Formen beziehungsweise Längen.

Erklärung: Die Vorder- und Hinterfläche sind in wahrer Größe gezeichnet. Die schräg nach hinten laufenden Seitenkanten sind verkürzt. Du arbeitest mit dem Verzerrungswinkel $\alpha = 45^\circ$ (Winkelmaß, unter dem die schräge Kante gezeichnet wird) und dem Verkürzungsfaktor v (einer Verkürzung um die Hälfte, also der Faktor, mit dem die Länge der schrägen Kante multipliziert wird). Strichliere nicht sichtbare Kanten! Damit erhält man eine Darstellung, die der Wirklichkeit gut entspricht.

Für den **Quader** mit dem Grundflächeninhalt G gilt:

$$\text{Oberflächeninhalt } O = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot h + 2 \cdot b \cdot h = 2 \cdot G + M$$

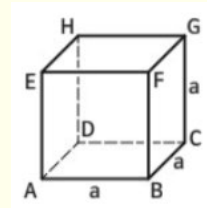
$$\text{Volumen: } V = a \cdot b \cdot h = G \cdot h$$



Für den **Würfel** mit dem Grundflächeninhalt G gilt:

$$\text{Oberflächeninhalt } O = 6 \cdot a \cdot a$$

$$\text{Volumen: } V = a \cdot a \cdot a = G \cdot a$$



Arbeitsblatt 2

Aufgabe 2 (gemeinsam im Plenum):

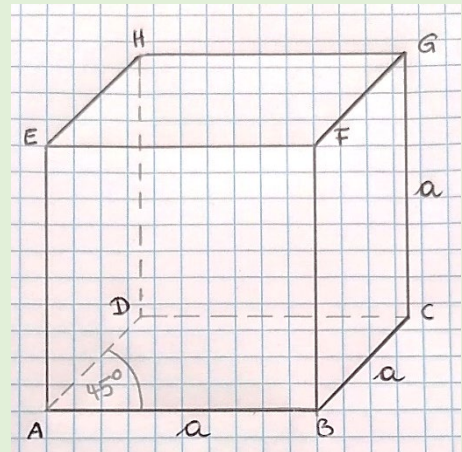
Beispiel:

Konstruiere den Schrägriss eines Würfels mit der Kantenlänge $a = 5\text{cm}$.

Berechne ebenso den Oberflächeninhalt als auch das Volumen des Würfels.

$$\text{Oberflächeninhalt } O = 6 \cdot a \cdot a = 6 \cdot 5 \cdot 5 = 150\text{cm}^2$$

$$\text{Volumen: } V = a \cdot a \cdot a = G \cdot a = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125\text{cm}^3$$



Aufgabe 3 (Partnerarbeit):

- a) Quader: Konstruiere den Schrägriss eines 7cm langen, 4 cm breiten und 3 cm hohen Quaders mit dem Verzerrungswinkel $\alpha = 45^\circ$ und dem Verkürzungsfaktor $v = 0,5$.

Berechne ebenso Oberfläche und Volumen!

Überlege dir 2 Gegenstände aus dem Alltag, die annähernd die Form dieses Quaders haben könnten!

- b) Würfel: Konstruiere den Schrägriss eines Würfels mit der Seitenlänge $a = 7\text{cm}$. Wähle $\alpha = 45^\circ$ und $v = 0,5$.

Berechne ebenso Oberfläche und Volumen!

Überlege dir 2 Gegenstände aus dem Alltag, die annähernd die Form dieses Würfels haben könnten!

Merkblatt 2

MERKE:

Als weitere Vertiefung des Themas „geometrische Körper“ werden nun noch die Oberflächeninhalte und Volumina der folgenden Körper näher besprochen: Zylinder, Pyramide, Kegel, Kugel.

Hinweis: Die Eigenschaften der geometrischen Körper sind den Schülern bereits vertraut. Ebenso sind die Schüler mit den Bezeichnungen $h_a, s, \dots$ vertraut. Durch das Zuordnungsformat sollen die Schüler selbst überlegen, wie sich die entsprechenden Formeln zusammensetzen!

a) Zylinder:

Oberflächeninhalt:

Volumen:

$$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$$

$$O = a^2 + 2 \cdot a \cdot h_a$$

b) Pyramide:

Oberflächeninhalt:

Volumen:

$$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$$

$$O = 2 \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h$$

c) Kegel:

Oberflächeninhalt:

Volumen:

$$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$$

$$O = 4 \cdot r^2 \cdot \pi$$

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h$$

d) Kugel

Oberflächeninhalt:

Volumen:

$$O = r^2 \cdot \pi + r \cdot \pi \cdot s$$

Arbeitsblatt 3

Aufgabe 4 (zuerst in der Kleingruppe, dann im Plenum):

Jeder Schüler soll sich ein typisches Mitbringsel aus seinem Heimatland überlegen, welches einen geometrischen Körper darstellt (war bereits Hausübung!). Dabei soll in der Kleingruppe folgende Tabelle ausgefüllt werden. Im Anschluss sollen die Ergebnisse an der Tafel im Plenum präsentiert werden. Gerne dürfen die Schüler die ausgewählten Mitbringsel in den Unterricht mitnehmen und gegebenenfalls verkosten lassen.

Die erste Zeile dient als Beispiel für ein Mitbringsel aus Österreich.

Mitbringsel	Körper	Maße	Anzahl Ecken	Anzahl Kanten	Anzahl Flächen	Oberfläche	Volumen
 Manner-Schnitten	Quader	a=97 b=84 h=15 (mm)	8	12	6	$O = 2 \cdot 97 \cdot 84 + 2 \cdot 97 \cdot 15 + 2 \cdot 84 \cdot 15$ $= 21\,726\text{mm}^2$	$V = 97 \cdot 84 \cdot 15$ $= 122\,220\text{mm}^3$ $= 122,22\text{cm}^3$

Lösungen

Aufgabe 3:

a)

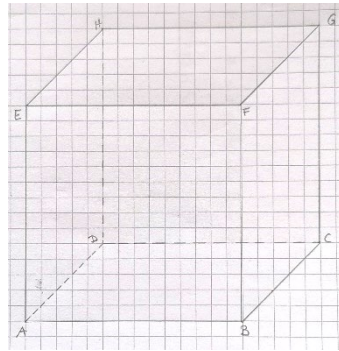
$$O = 2 \cdot 7 \cdot 4 + 2 \cdot 7 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 3 = 122 \text{ cm}^2$$

$$V = 7 \cdot 4 \cdot 3 = 84 \text{ cm}^3$$

b)

$$O = 6 \cdot 7^2 = 294 \text{ cm}^2$$

$$V = 7^3 = 343 \text{ cm}^3$$



Merkblatt 2:

- Zylinder:

Oberflächeninhalt: $O = 2 \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h$

Volumen: $V = r^2 \cdot \pi \cdot h$

- Pyramide:

Oberflächeninhalt: $O = a^2 + 2 \cdot a \cdot h_a$

Volumen: $V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$

- Kegel:

Oberflächeninhalt: $O = r^2 \cdot \pi + r \cdot \pi \cdot s$

Volumen: $V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$

- Kugel

Oberflächeninhalt: $O = 4 \cdot r^2 \cdot \pi$

Volumen: $V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$

2. Interviewanalyse

Der Lehrer, der diese Einheit unterrichtet, hat 12 Jahre Lehrerfahrung. Sein zweites Fach ist Bewegung und Sport. Er hat keine spezielle Aus- oder Weiterbildung zum Unterrichten in multikulturellen Klassen erhalten.

Der Lehrer äußerte sich sehr positiv zu Aufgabe 1 (Festkörper in der realen Welt). Er bereitete einige Bilder von Gebäuden vor, um sie in der Klasse vorzustellen, falls die Schüler*innen keine geeigneten Fotos im Internet finden sollten, verwendete sie aber nicht für die eigentliche Unterrichtsstunde, da die Schüler*innen in der Lage waren, eine große Zahl von Bildern zu finden, die für diese Aufgabe verwendet werden konnten. Er sagte, er hätte es besser gefunden, mit den in Aufgabe 1 gefundenen Objekten weiterzuarbeiten und eventuell nach der Einführung des Schrägrisses darauf zurückzukommen.

Der Lehrer beschrieb die zweite Stunde (Aufgaben 2 und 3) als ziemlich standardmäßig und sehr ähnlich zu dem, was in dem Schulbuch, das er regelmäßig für den Unterricht verwendet, vorgeschlagen wird. Er sagte, dass die Schüler*innen bei Aufgabe 3b (Finden von Alltagsgegenständen in Würfelform) ziemlich kreativ waren, obwohl sie meistens Gegenstände benannten, die eigentlich Quader sind.

Der Lehrer war sich nicht ganz sicher, wie er mit Merkblatt 2 praktisch arbeiten sollte. Wenn es in Papierform verteilt wird (wie er es ursprünglich vorhatte), müssten die Schüler*innen die Gleichungen ausschneiden, zuordnen und in ihr Heft kleben. Wenn es als Word-Datei auf eine Leinwand projiziert und dann im Plenum damit gearbeitet wird (was er schließlich getan hat), müssen die Schüler*innen alle Gleichungen in der richtigen Reihenfolge in ihre Hefte schreiben, was fehleranfällig ist. Eine andere Möglichkeit wäre, die Datei im Plenum zu bearbeiten, um die richtige Zuordnung zu ermitteln, und dann einen Ausdruck mit der richtigen Zuordnung an die Schüler*innen zu verteilen.

Der Lehrer sagte, dass die Schüler*innen sehr viel Spaß an Aufgabe 4 hatten. Die Schüler haben sich eine Reihe verschiedener Objekte ausgedacht, und einige haben tatsächlich Objekte in den Unterricht mitgebracht. Er kommentierte insbesondere die positiven Auswirkungen dieser Aktivität auf einige der Schüler*innen mit Migrationshintergrund. Insbesondere erwähnte er einen Burschen, den er als „normalerweise sehr schüchtern und zurückhaltend“ beschrieb. Dieser Schüler brachte einen Gegenstand aus seiner Familie mit und präsentierte ihn stolz zuerst der Gruppe und dann der ganzen Klasse. Der Lehrer sagte, es wäre gut, mehr Verbindungen zum Hintergrund der Schüler herzustellen.

3. Verbesserungsvorschläge

Der Lehrer schlug mehrere Verbesserungen für die Einheit vor:

Erstens würde er vorschlagen, die Objekte (Gebäude mit geometrischen Formen) von Aufgabe 1 zu verwenden und mit ihnen in der zweiten Stunde zu arbeiten, d.h. die Schüler*innen Schrägrisse dieser Objekte erstellen zu lassen, anstatt von allgemeinen abstrakten Objekten, wie es derzeit gemacht wird.

Der Lehrer schlug auch vor, die Arbeit mit Merkblatt 2 in der dritten Stunde besser zu beschreiben. Er würde es entweder im Plenum bearbeiten und dann eine korrekte Lösung der Zuordnungsaufgabe an die Schüler*innen verteilen, oder die Schüler*innen direkt mit der elektronischen Datei arbeiten lassen, die über Moodle verteilt werden könnte. Er hielt die Verwendung einer Papierversion für die eigentliche Zuordnungsaufgabe für unpraktisch. Unabhängig davon, auf welche Art das Blatt verwendet wird, würde er empfehlen, dass die Schüler*innen am Ende der Stunde das Merkblatt mit den richtigen Zuordnungen erhalten.