



Fallstudie 07

Grundlegende Daten

Titel der Unterrichtseinheit	Mathematik im Blumenbeet
Einheit entwickelt von	BORG Deutsch-Wagram (AT)
Basierend auf dem Konzept	Grüne Geometrie
Konzept entwickelt von	Istituto Comprensivo Statale "Malaspina" Massa (IT)
Unterrichtsdatum	13.05.2024
Anzahl der Schüler*innen	11
Anzahl der Schüler*innen mit Migrationshintergrund	1

1. Beschreibung der Unterrichtseinheit

Titel	Mathematik im Blumenbeet
Alter der Schüler*innen	17-18 Jahre
Dauer der Einheit	1 x 50 Minuten bis maximal 2 x 50 Minuten
Mathematisches Thema	Anwendungen von Differential- und Integralrechnung
Vorwissen der Schüler*innen	<ul style="list-style-type: none">• Aufstellen einer Polynomfunktion bei gegebenen Stützstellen• Ableiten von Polynomfunktionen• Integrieren von Polynomfunktionen• Interpretieren des Integrals als Fläche unter einem Funktionsgraphen
Benötigte Materialien	<ul style="list-style-type: none">• Arbeitsblatt 1
Ziele	Die Schüler*innen ... <ul style="list-style-type: none">• können ihr Wissen über die Eigenschaften von Polynomfunktionen in Alltagssituationen anwenden• können Polynomfunktionen verwenden, um Objekte aus dem täglichen Leben zu modellieren• können Ableitungen und Integrale in Alltagssituationen anwenden
Bemerkungen zum Arbeiten mit Schüler*innen mit Migrationshintergrund	<ul style="list-style-type: none">• Schüler*innen (insbesondere jene mit Migrationshintergrund) können Fotos von Blumenbeeten in Gärten oder Parks ihrer Ursprungsländer mitbringen

Unterrichtsplanung

Erste Unterrichtseinheit (50 Minuten):

Zeit	Sozialform	Inhalt und Anmerkung
ca. 5 min	Lehrer-Schüler-Gespräch	Die Lehrperson motiviert die Schülerinnen und Schüler für das Thema der Stunde und erklärt seine Bedeutung im Alltag.
ca. 35 min	Partnerarbeit oder Kleingruppen	Die Schülerinnen und Schüler lösen die Aufgabenstellungen des Arbeitsblattes in Zweier- oder Dreier-Teams. Die Lehrperson geht durch die Klasse und hilft bei auftretenden Problemen.
ca. 15 min	Lehrer-Schüler-Gespräch	Vergleichen der Ergebnisse der Aufgaben

Sollte die Klasse sehr engagiert und begeistert an der Aufgabenstellung arbeiten, kann eine weitere „schwierigere“ Aufgabe (Aufgabe 4) ergänzt werden. Dabei handelt es sich um eine Extremwertaufgabe aus der Differentialrechnung. Diese Aufgabe kann entweder am Ende der ersten Stunde, oder in einer weiteren Unterrichtsstunde bearbeitet werden.

Die Form des Blumenbeets wird durch eine Funktion f beschrieben, wobei x die Breite des Beets in Metern angibt und $f(x)$ die Höhe des Blumenbeets in Metern angibt.

Eine Gärtnerin legt das Blumenbeet einer Kundin so an, dass das Blumenbeet an den Rändern des Gartens beginnen und in der Mitte des Gartens seine maximale Höhe erreicht. Die Kundin merkt an, dass das Blumenbeet eine maximale „Höhe“ von drei Metern haben soll. Weiters weiß man, dass die Funktion f nur für $0 \leq x \leq 10$ definiert ist.

- Platz für deine Skizze:

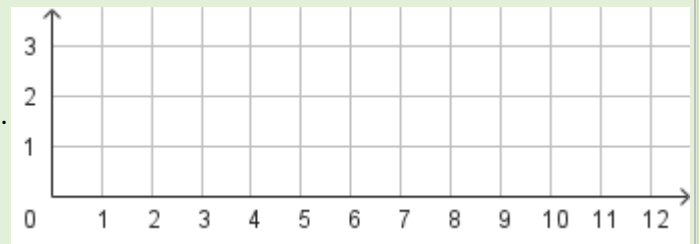
- | Eigenschaft in Worten | Mathematische Bedingung |
|---|---|
| Das Blumenbeet beginnt an den Rändern des Gartens.
Diese Ränder sind bei $x = \underline{\hspace{1cm}}$ und $x = \underline{\hspace{1cm}}$. | I: <u> </u>
II: <u> </u> |
| Das Blumenbeet hat in der Mitte des Gartens seine maximale Höhe. Die Mitte des Gartens liegt bei $x = \underline{\hspace{1cm}}$. | III: <u> </u> |
| Die Kundin merkt an, dass das Blumenbeet eine maximale „Höhe“ von drei Metern haben soll. | IV: <u> </u> |

Die gesuchte Polynomfunktion ist gegeben durch: $f(x) =$ _____

Aufgabe 2:

Skizziere die Polynomfunktion, die das Blumenbeet beschreibt, nochmals ins gegebene Koordinatensystem.

Schätze mit Hilfe von jeweils fünf Unter- und Obersummen den tatsächlichen Flächeninhalt des Blumenbeetes ab.



Aufgabe 3:

Ermittle die tatsächliche Gesamtfläche des Blumenbeetes im Garten.

Mathematik im Blumenbeet – Arbeitsblatt 1 mit Lösungen



In einem rechteckigen Garten soll ein Blumenbeet angelegt werden.

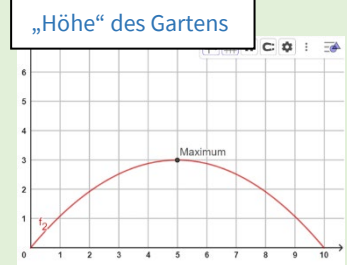
Die Form des Blumenbeets wird durch eine Funktion f beschrieben, wobei x die Breite des Beets in Metern angibt und $f(x)$ die Höhe des Blumenbeets in Metern angibt.

Aufgabe 1:

Eine Gärtnerin legt das Blumenbeet einer Kundin so an, dass das Blumenbeet an den Rändern des Gartens beginnen und in der Mitte des Gartens seine maximale Höhe erreicht. Die Kundin merkt an, dass das Blumenbeet eine maximale „Höhe“ von drei Metern haben soll. Weiters weiß man, dass die Funktion f nur für $0 \leq x \leq 10$ definiert ist.

- c) Fertige eine Skizze des Gartens mit dem Blumenbeet an und beschrifte sie so weit wie möglich.

Platz für deine Skizze:



Breite des Gartens

- d) Ermittle anhand der obigen Angaben die Termdarstellung einer Funktion f , die den Verlauf des Blumenbeets im Garten beschreibt. Verwende dazu die nachfolgenden Eigenschaften.

	Eigenschaft in Worten	Mathematische Bedingung
1)	Das Blumenbeet beginnt an den Rändern des Gartens. Diese Ränder sind bei $x = \underline{0}$ und $x = \underline{10}$.	I: $\underline{f(0) = 0}$ II: $\underline{f(10) = 0}$
2)	Das Blumenbeet hat in der Mitte des Gartens seine maximale Höhe. Die Mitte des Gartens liegt bei $x = \underline{5}$.	III: $\underline{f'(5) = 0}$
3)	Die Kundin merkt an, dass das Blumenbeet eine maximale „Höhe“ von drei Metern haben soll.	IV: $\underline{f(5) = 3}$

Überlege zunächst den Grad der Polynomfunktion, der für diese Gestaltung des Blumenbeetes am besten und einfachsten geeignet ist.

Polynomfunktion vom Grad 2: Diese ist allgemein gegeben durch: $f(x) = \underline{ax^2 + bx + c}$

Ermittle unterhalb nachvollziehbar die gesuchte Polynomfunktion, die das Blumenbeet beschreibt:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{und} \quad f'(x) = 2ax + b$$

$$\begin{array}{llll} \text{I: } f(0) = 0 & a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 0 & \rightarrow c = 0 \\ \text{II: } f(10) = 0 & a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c = 0 & \rightarrow 100a + 10b = 0 \\ \text{III: } f'(5) = 0 & 2 \cdot a \cdot 5 + b = 0 & \rightarrow 10a + b = 0 \\ \text{IV: } f(5) = 3 & a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c = 3 & \rightarrow 25a + 5b = 3 \end{array}$$

Aus Gleichung III und IV ergibt sich das Gleichungssystem:

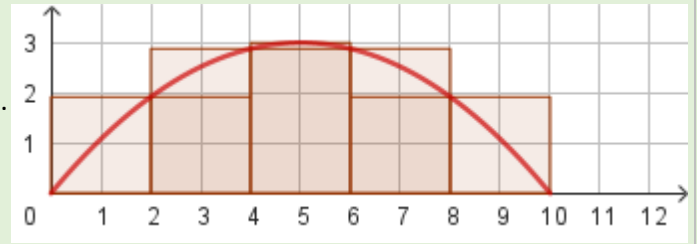
$$\begin{array}{llll} \text{III: } 10a + b = 0 & | \cdot (-5) & -25a = 3 & | : (-25) \rightarrow a = -\frac{3}{25} \\ \text{IV: } 25a + 5b = 3 & & & \\ \text{III: } -50a - 5b = 0 & & 10a + b = 0 & | -b \\ \text{IV: } 25a + 5b = 3 & & 10a = -b & \\ & & b = \frac{30}{25} = \frac{6}{5} & \end{array}$$

Die gesuchte Polynomfunktion ist gegeben durch: $f(x) = -\frac{3}{25}x^2 + \frac{6}{5}x$

Aufgabe 2:

Skizziere die Polynomfunktion, die das Blumenbeet beschreibt, nochmals ins gegebene Koordinatensystem.

Schätze mit Hilfe von jeweils fünf Unter- und Obersummen den tatsächlichen Flächeninhalt des Blumenbeetes ab.



Für die Abschätzung des Flächeninhaltes mit Hilfe von Ober- bzw. Untersummen werden einige Funktionswerte benötigt, dessen Werte in der nachfolgenden Wertetabelle (gerundet) angegeben werden.

x	0	2	4	5	6	8	10
$f(x)$	0	1,92	2,88	3	2,88	1,92	0

Untersumme: $U_5 = 2 \cdot [f(0) + f(2) + f(4) + f(6) + f(8)]$
 $U_5 \cong 13,44$

Obersumme: $O_5 = 2 \cdot [f(2) + f(4) + f(5) + f(6) + f(8)]$
 $O_5 \cong 25,2$

Es gilt: $13,44 \text{ m}^2 < \text{tatsächliche Fläche} < 25,2 \text{ m}^2$

Aufgabe 3:

Ermittle die tatsächliche Gesamtfläche des Blumenbeetes im Garten.

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{10} f(x) dx = \int_0^{10} \left(-\frac{3}{25}x^2 + \frac{6}{5}x \right) dx = \left(-\frac{3x^3}{25 \cdot 3} + \frac{6x^2}{5 \cdot 2} \right) \Big|_0^{10} \\ &= \left(-\frac{3 \cdot 10^3}{25 \cdot 3} + \frac{6 \cdot 10^2}{5 \cdot 2} \right) - \left(-\frac{3 \cdot 0^3}{25 \cdot 3} + \frac{6 \cdot 0^2}{5 \cdot 2} \right) = (-40 + 60) = 20 \end{aligned}$$

Die tatsächliche Größe des Blumenbeetes ist 20 m^2 .

Zusatzaufgabe



★ Aufgabe 4:

Um die Gartenfläche möglichst optimal auszunutzen, stellt sich die Kundin die Frage welche optimale Breite x das Grundstück haben müssten, damit die maximale Gesamtfläche der Blumenbeete im Garten gewährleistet wird. Ermittle nachvollziehbar.

2. Interviewanalyse

Die Lehrerin, die diese Einheit unterrichtet, hat 7 Jahre Lehrerfahrung. Ihr zweites Fach ist Physik. Sie hat keine spezielle Aus- oder Weiterbildung zum Unterrichten in multikulturellen Klassen erhalten.

Die Lehrerin erwähnte, dass, obwohl der Kontext der Aufgaben wahrscheinlich nicht dem entspricht, was eine echte Gärtnerin tun würde, sie dennoch gerne mit ihnen gearbeitet hat. Den Schüler*innen gefiel die Tatsache, dass es einen „ungewöhnlichen Kontext“ gab, im Gegensatz zu den sonst meist üblichen Funktionsgraphen ohne jeglichen Kontext, oder Standard-Optimierungsaufgaben.

Die Lehrerin merkte auch an, dass diese Aktivität eine gute Vorbereitung für die Matura sei, wo Aufgaben mit Integration und Berechnung von Flächen unter Funktionsgraphen ziemlich üblich sind. Sie erwähnte, dass sie ursprünglich zögerte, einen unüblichen Kontext für diese Vorbereitung zu verwenden, aber sie sagte, dass die tatsächlichen mathematischen Prozesse, die sie verwendete, die gleichen waren wie in ihren üblichen Vorbereitungen, nur mit einem Kontext, der für die Schüler*innen interessanter war.

Für die Berechnungen der Unter- und Obersummen in Aufgabe 2 und auch für die Überprüfung der Ergebnisse der Aufgaben 1 und 3 verwendete die Lehrerin GeoGebra. Sie merkte allgemein den mangelnden Einsatz von Technologie in der Unterrichtseinheit an und schlug vor, entweder einige zusätzliche Aufgaben zu stellen, bei denen die Schüler*innen Technologie einsetzen sollten, oder die vorgegebenen Aufgaben so zu ändern, dass die Schüler*innen den Einsatz von Technologie üben können, auch im Hinblick auf die Matura.

Die Lehrerin fügte auch hinzu, dass es schön wäre, während der Arbeit an Aufgabe 1 den Schulhof zu nutzen, um eine „reale Skizze“ des Gartens zu erstellen.

3. Verbesserungsvorschläge

Die Lehrerin schlug mehrere Verbesserungen für die Einheit vor:

Erstens würde sie vorschlagen, den Einsatz von Technologie, insbesondere von Dynamischer Geometrie-Software, für die Bearbeitung der Aufgaben hinzuzufügen. Insbesondere die Aktivität in Aufgabe 2 (Berechnung der Unter- und Obersumme) hält sie für „nicht sehr hilfreich, um die Kompetenzen der Schüler*innen zu verbessern“, wenn sie von Hand durchgeführt wird. Die Schüler*innen haben solche Aufgaben schon einmal gemacht und wissen, wie man sie ausführt, und bei einer Anwendungsaufgabe würden die erforderlichen manuellen Berechnungen sie nur ausbremsen und ihre Motivation verringern.

Ihr zweiter Vorschlag wäre, aus dem Klassenzimmer auf den Schulhof oder sogar auf einen nahegelegenen Spielplatz zu gehen, wo die Schüler*innen z.B. eine Rasenfläche oder sogar eine Sandkiste nutzen könnten, um eine lebensgroße Skizze ihres „Gartens“ zu zeichnen. Sie sagte, dass dies für die Schüler*innen sehr motivierend wäre, da sie höhere Mathematik einfach im Freien anwenden könnten, was ihnen bewusstmachen würde, dass Mathematik buchstäblich „überall um uns herum“ ist.