



Co-funded by
the European Union



Μελέτη περίπτωσης 02

Βασικά δεδομένα

Τίτλος Ερευνητικής Διδακτικής Ενότητας	Εφαρμογές Εκθετικών Συναρτήσεων
Μονάδα που δημιουργήθηκε από	BORG Deutsch-Wagram (AT)
Βασισμένο στην ιδέα	Εκθετικά μοντέλα πραγματικής ζωής
Η ιδέα δημιουργήθηκε από	Škola da Vinci (Τσεχία)
Ημερομηνία διδασκαλίας	20.11.2023
Αριθμός μαθητών στην τάξη	11
Αριθμός μεταναστών μαθητών	1

Χρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση. Ωστόσο, οι απόψεις και οι απόψεις που εκφράζονται είναι μόνο των συγγραφέων και δεν αντικατοπτρίζουν απαραίτητα εκείνες της Ευρωπαϊκής Ένωσης ή της OeAD-GmbH. Ούτε η Ευρωπαϊκή Ένωση ούτε η χορηγούσα αρχή μπορούν να θεωρηθούν υπεύθυνες γι' αυτές.

1. Περιγραφή Μονάδας Ερευνητικής Διδακτικής Μονάδας

Τίτλος	Εφαρμογές Εκθετικών Συναρτήσεων
Ηλικία μαθητών/τάξη	16 χρόνων
Διάρκεια της ενότητας	1 x 50 λεπτά
Μαθηματικό θέμα	Μη γραμμικές συναρτήσεις
Προαπαιτούμενες γνώσεις	<ul style="list-style-type: none">• Ιδιότητες εκθετικών συναρτήσεων• Ερμηνεία γραφημάτων
Απαιτούμενα υλικά	<ul style="list-style-type: none">• Φύλλο εργασίας "Εφαρμογές Εκθετικών Συναρτήσεων" (1 αντίγραφο ανά μαθητή)• Κάρτες ευρετηρίου "Αύξηση και απόσβεση" (μερικά αντίγραφα, αν είναι δυνατόν πλαστικοποιημένα)• Τελικά: Αριθμομηχανή
Στόχοι	<ul style="list-style-type: none">• Εφαρμογή εκθετικών συναρτήσεων σε πραγματικά προβλήματα• Εδραίωση της γνώσης των εκθετικών συναρτήσεων• Εργασία με μαθηματικά μοντέλα πραγματικών προβλημάτων
Σημειώσεις σχετικά με την εργασία με μετανάστες μαθητές	<ul style="list-style-type: none">•••

Σχέδιο μαθήματος:

Πριν από την έναρξη του μαθήματος, διανέμονται τα αντίγραφα των καρτών ευρετηρίου σε λίγα σημεία στην τάξη. Κάθε μέρος θα πρέπει να έχει ένα πλήρες σύνολο των καρτών ευρετηρίου. Αυτά τα μέρη χρησιμεύουν ως "σταθμοί βοήθειας" όπου οι μαθητές μπορούν να αναζητήσουν πληροφορίες που θα τους βοηθήσουν να λύσουν τις εργασίες στο φύλλο εργασίας.

Ώρα	Μέθοδος	Περιεχόμενο και σχόλια
περίπου 10 λεπτά	Παρουσίαση και επικοινωνία Δάσκαλου -μαθητή	Ο/η εκπαιδευτικός παρακινεί τους μαθητές για το θέμα του μαθήματος και περιγράφει τη σημασία των ποσοστών στην καθημερινή ζωή. Ο δάσκαλος, μαζί με τους μαθητές, επαναλαμβάνει τις κύριες έννοιες και ιδιότητες των εκθετικών συναρτήσεων.
περίπου 25 λεπτά	Ομαδοσυνεργατική	Οι μαθητές επιλύουν τις εργασίες του φύλλου εργασίας σε συνεργασία σε ομάδες (2 μαθητές). Ο/η εκπαιδευτικός υποστηρίζει τις ομάδες αν χρειαστεί.
περίπου 15 λεπτά	Επικοινωνία Δάσκαλου -μαθητή	Σύγκριση των αποτελεσμάτων

Εφαρμογές Εκθετικών Συναρτήσεων – Φύλλο εργασίας

Οι ακρίδες είναι έντομα που είναι ευρέως διαδεδομένα σε πολλές χώρες του κόσμου. Υπάρχουν πολλά είδη ακρίδων, αλλά όλα έχουν ισχυρά οπίσθια πόδια που τους επιτρέπουν να πηδούν.



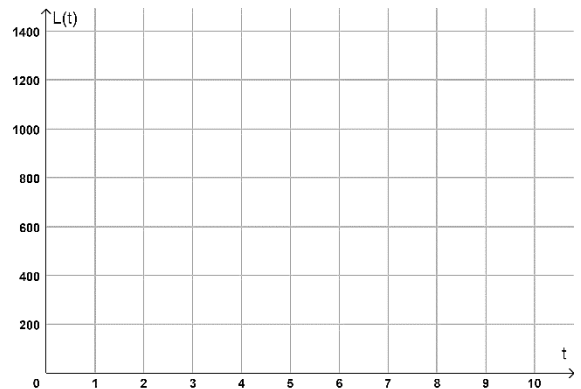
Οι προνύμφες των ακρίδων εκκολάπτονται στις αρχές της άνοιξης όταν ζεσταίνονται. Τρέφονται με τους νεαρούς βλαστούς φυτών και δέντρων. Ο πληθυσμός των ακρίδων αυξάνεται εκθετικά όταν οι συνθήκες είναι ιδανικές γι' αυτές.

Εργασία 1:

Στις αρχές της άνοιξης, υπολογίζονται 100 ακρίδες του είδους Α σε μια συγκεκριμένη περιοχή.

Θεωρείται ότι ο πληθυσμός θα αυξηθεί κατά 45% ημερησίως τις επόμενες ημέρες. Ο χρόνος από την αρχή της άνοιξης δίνεται ως t σε ημέρες και ο συνολικός αριθμός των ακρίδων ως $L(t)$

- a) Δημιουργήστε μια γραφική παράσταση της εξέλιξης του πληθυσμού των ακρίδων μέσα σε μία εβδομάδα. Καταγράψτε τις υπολογισμένες τιμές για κάθε μέρα.



- b) Ορίστε μια εξίσωση για τη συνάρτηση $L(t)$ στη μορφή . $L(t) = L_0 \cdot a^t$
- c) Υπολογίστε πότε ο πληθυσμός των ακρίδων θα έχει αυξηθεί κατά οκτώ φορές και ελέγξτε το αποτέλεσμά σας με το γράφημα από την εργασία α). Σημειώστε την υπολογισμένη τιμή στην εργασία α).

Εργασία 2:

Στην ίδια συγκεκριμένη περιοχή, 20 ακρίδες του είδους Β υπολογίζονται δύο ημέρες μετά την έναρξη της άνοιξης. Οκτώ ημέρες αργότερα η καταμέτρηση επαναλαμβάνεται και μετριοούνται 47 ακρίδες. Ο χρόνος από την αρχή της άνοιξης δίνεται ως t σε ημέρες και ο συνολικός αριθμός των ακρίδων ως $H(t)$

- a) Δημιουργήστε μια εξίσωση για $H(t)$ τη μορφή . $H(t) = H_0 \cdot e^{\lambda \cdot t}$
- b) Προσδιορίστε με ποιο ποσοστό αυξάνεται ο πληθυσμός των ακρίδων σε μια μέρα.
- c) Προσδιορίστε με ποιο ποσοστό αυξάνεται ο πληθυσμός ακρίδων σε μία ώρα.

Εφαρμογές εκθετικών συναρτήσεων – Φύλλο εργασίας με λύσεις

Οι ακρίδες είναι έντομα που είναι ευρέως διαδεδομένα σε πολλές χώρες του κόσμου. Υπάρχουν πολλά είδη ακρίδων, αλλά όλα έχουν ισχυρά οπίσθια πόδια που τους επιτρέπουν να πηδούν.



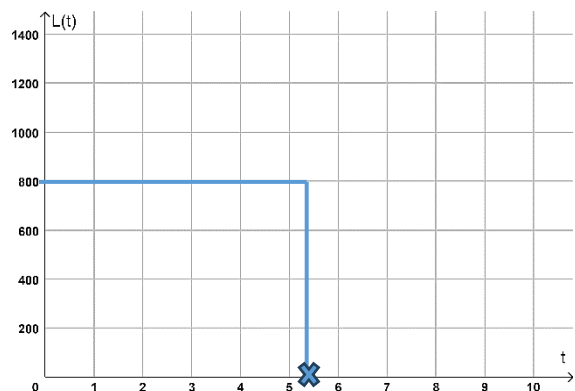
Οι προνύμφες των ακρίδων εκκολάπτονται στις αρχές της άνοιξης όταν ζεσταίνονται. Τρέφονται με τους νεαρούς βλαστούς φυτών και δέντρων. Ο πληθυσμός των ακρίδων αυξάνεται εκθετικά όταν οι συνθήκες είναι ιδανικές γι' αυτές

Εργασία 1:

Στις αρχές της άνοιξης, υπολογίζονται 100 ακρίδες του είδους Α σε μια συγκεκριμένη περιοχή.

Θεωρείται ότι ο πληθυσμός θα αυξηθεί κατά 45% ημερησίως τις επόμενες ημέρες. Ο χρόνος από την αρχή της άνοιξης δίνεται ως t σε ημέρες και ο συνολικός αριθμός των ακρίδων ως $L(t)$

- a) Δημιουργήστε μια γραφική παράσταση της εξέλιξης του πληθυσμού των ακρίδων μέσα σε μία εβδομάδα. Καταγράψτε τις υπολογισμένες τιμές κάθε ημέρας.



- b) Ορίστε μια εξίσωση για τη συνάρτηση $L(t)$ στη μορφή . $L(t) = L_0 \cdot a^t$ $L(t) = 100 \cdot 1.45^t$

- c) Υπολογίστε πότε ο πληθυσμός των ακρίδων έχει αυξηθεί οκτώ φορές και ελέγξτε το αποτέλεσμα σας με το γράφημα από την εργασία α). Σημειώστε την υπολογιζόμενη τιμή στην εργασία α).

$$8 \cdot 100 = 100 \cdot 1.45^t \quad | : 100$$

$$8 = 1.45^t \quad | \log$$

$$\log(8) = t \cdot \log(1.45) \quad | : \log(1.45)$$

$$t = \frac{\log(8)}{\log(1.45)} \cong 5.60 \text{ days}$$

Εργασία 2:

Στην ίδια συγκεκριμένη περιοχή, 20 ακρίδες του είδους Β υπολογίζονται δύο ημέρες μετά την έναρξη της άνοιξης. Οκτώ ημέρες αργότερα η καταμέτρηση επαναλαμβάνεται και μετριοούνται 47 ακρίδες. Ο χρόνος από την αρχή της άνοιξης δίνεται ως t σε ημέρες και ο συνολικός αριθμός των ακρίδων ως $H(t)$

- a) Δημιουργήστε μια εξίσωση για $H(t)$ τη μορφή . $H(t) = H_0 \cdot e^{\lambda \cdot t}$
- b) Προσδιορίστε με ποιο ποσοστό αυξάνεται ο πληθυσμός των ακρίδων σε μια μέρα.
- c) Προσδιορίστε με ποιο ποσοστό αυξάνεται ο πληθυσμός ακρίδων σε μία ώρα.

Δύο ημέρες μετά την έναρξη της άνοιξης παίρνει κανείς: . Οκτώ ημέρες αργότερα κάποιος παίρνει: $H(2) = 20$ $H(10) = 47$

$$H(10) = H(2) \cdot a^8 \rightarrow 47 = 20 \cdot a^8 \rightarrow a = \sqrt[8]{\frac{47}{20}} \cong 1.1127$$

$$H(2) = H(0) \cdot a^2 \rightarrow \text{Ακρίδες } H(0) = \frac{H(2)}{a^2} = \frac{20}{1.1127^2} \cong 16$$

$$\text{Εξίσωση: } H(t) = 16 \cdot 1.1127^t$$

$$a = e^\lambda \rightarrow 1.1127 = e^\lambda \rightarrow \lambda = \ln(1.1127) \cong 0.1068$$

$$\text{Εξίσωση:} \dots \text{Λύση της εργασίας α)} H(t) = 16 \cdot e^{0.1068 \cdot t}$$

Λύση της εργασίας β): Ο πληθυσμός των ακρίδων αυξάνεται κατά 11,27% ανά ημέρα

Λύση της εργασίας γ): Ο πληθυσμός των ακρίδων αυξάνεται κατά 0,45% ανά ώρα. $1.1127^{\frac{1}{24}} \cong 1.0045$

Νόμοι εκθετικής αύξησης και απόσβεσης:

Οι εκθετικές συναρτήσεις μπορούν να έχουν μια αυθαίρετη θετική βάση. Στις θετικές επιστήμες, χρησιμοποιείται συχνά ο αριθμός του Euler. Εκτός από τη γενική αναπαράσταση $f(x) = c \cdot a^x$, συχνά χρησιμοποιείται $f(x) = c \cdot e^{\lambda x}$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.

	Εκθετική αύξηση	Εκθετική μείωση / απόσβεση
Αυθαίρετη βάση a	$N(t) = N_0 \cdot a^t$ με $a > 1, t \geq 0$ a ονομάζεται αυξητικός παράγοντας	$N(t) = N_0 \cdot a^t$ με $0 < a < 1, t \geq 0$ a ονομάζεται παράγοντας μείωσης
Βάση e	$N(t) = N_0 \cdot e^{+\lambda t}$ με $\lambda > 0, t \geq 0$ λ ονομάζεται σταθερά αύξησης	$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$ με $\lambda > 0, t \geq 0$ λ ονομάζεται σταθερά απόσβεσης

λ ... "λάμδα", ελληνικό γράμμα

Παραδείγματα:

	Εκθετική αύξηση	Εκθετική μείωση / απόσβεση
Αυθαίρετη βάση a	$N(t) = 20 \cdot 1.23^t$	$N(t) = 20 \cdot 0.23^t$
Βάση e	$N(t) = 20 \cdot e^{0.4 t}$	$N(t) = 20 \cdot e^{-0.4 t}$

Σημαντικές παρατηρήσεις:

- Ο αρχική τιμή συμβολίζεται με N_0 , που σημαίνει: $N_0 = N(t = 0)$
- Πόσο αλλάζει μια τιμή ανά μονάδα χρόνου μπορεί να διαβαστεί μόνο από το νόμο της αύξησης ή της απόσβεσης, αν είναι στη μορφή $f(x) = c \cdot a^x$ ή $N(t) = N_0 \cdot a^t$

Εργασία επίδειξης 1:

Εκφράστε το νόμο της εκθετικής μεταβολής $N(t) = 1500 \cdot 1.05^t$ χρησιμοποιώντας τη βάση e !

Οι δύο μορφές του νόμου μεταβολής είναι: $a = e^{\lambda}$ / Συμπλήρωση $a = 1.05$
 $N(t) = N_0 \cdot a^t$ και $N(t) = N_0 \cdot e^{+\lambda t}$ $1.05 = e^{\lambda}$ / $\ln$
 Συγκρίνοντας αυτά τα δύο, μπορεί κανείς να δει ότι $\ln(1.05) = \lambda \cdot \underbrace{\ln(e)}_{=1}$
 $a = e^{\lambda}$. Αυτό μπορεί τώρα να συμπληρωθεί με τους αριθμούς από την εργασία. / Υπολογίστε $\ln(1.05)$ $\ln(1.05) = \lambda$
 $0.049 \approx \lambda$
 Ο νόμος εκθετικής μεταβολής (με βάση e) είναι: $N(t) = 1500 \cdot e^{0.049 \cdot t}$

Εργασία επίδειξης 2:

Μια ποσότητα αυξάνεται σύμφωνα με το νόμο αύξησης, όπου μετريέται σε χρόνια. Με ποιο ποσοστό αυξάνεται η ποσότητα ανά έτος; $N(t) = 490 \cdot e^{0.04879 \cdot t}$

Για να μάθετε με ποιο ποσοστό αυξάνεται η ποσότητα ετησίως, πρέπει να χρησιμοποιήσετε τον τύπο $N(t) = N_0 \cdot a^t$. Μόνο εκεί μπορεί κανείς να διαβάσει το ποσοστό. $a = e^{\lambda}$ / Συμπλήρωση $e^{0.04879}$
 $a = e^{0.04879}$ / Υπολογίζω $e^{0.04879}$
 $a \approx 1.05$
 Οι δύο μορφές του νόμου εκθετικής μεταβολής πρέπει να συγκριθούν. Αυτές είναι: $N(t) = N_0 \cdot a^t$ και $N(t) = N_0 \cdot e^{+\lambda t}$
 Συγκρίνοντας, μπορεί κανείς να δει ότι $a = e^{\lambda}$. Αυτό μπορεί τώρα να συμπληρωθεί με τους αριθμούς από την εργασία.
 Ο νόμος της εκθετικής μεταβολής (με βάση a) είναι: $N(t) = 490 \cdot 1.05^t$
 Από την εξίσωση αυτή μπορεί κανείς να διαβάσει ότι η ποσότητα αυξάνεται κατά 5 % ετησίως.

Καθορισμός νόμου εκθετικής αύξησης ή απόσβεσης, χρησιμοποιώντας δύο γνωστές τιμές

Εργασία επίδειξης:

Το απόθεμα ξυλείας ενός δάσους εκτιμήθηκε σε 150.000 κυβικά μέτρα το 2005. Πέντε χρόνια αργότερα, το 2010, η εκτίμηση ήταν για 168.000 κυβικά μέτρα.

Υποτίθεται ότι έχουμε εκθετική ανάπτυξη. Καθορίστε έναν εκθετικό νόμο μεταβολής για το απόθεμα ξυλείας h με $h(t) = h_0 \cdot a^t$ ως συνάρτηση του αριθμού των ετών t που έχουν περάσει από το 2000.

Βήμα 1: Υπολογισμός παραμέτρου a

Από το κείμενο των καθηκόντων, γνωρίζουμε ότι αυτό σημαίνει το έτος 2000
($t = 0$) $h_0 = h(0)$

Επίσης, γνωρίζουμε δύο τιμές:

Το απόθεμα ξυλείας το 2005 ανέρχεται σε 150 000 m³ $\rightarrow h(5) = 150\,000$

Το απόθεμα ξυλείας το 2010 ανέρχεται σε 168 000 m³ $\rightarrow h(10) = 168\,000$

Οι δύο αξίες $h(5)$ και η ιδιότητα $h(10)$

$f(x+h) = f(x) \cdot a^h$ χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό της παραμέτρου a

Σημείωση: Για την επίλυση των εργασιών του φύλλου εργασίας, στρογγυλοποιήστε την παράμετρο a σε 4 δεκαδικά ψηφία, εκτός εάν αναφέρεται διαφορετικά!

Βήμα 2: Υπολογισμός της αξίας του h_0

Για να υπολογίσουμε, χρησιμοποιούμε ξανά την ιδιότητα

$f(x+h) = f(x) \cdot a^h$.

Το $h(0)$ μπορεί να βρεθεί συμπληρώνοντας τις γνωστές τιμές.

Εδώ στρογγυλοποιούμε σε ακέραιους αριθμούς, καθώς το κείμενο των εργασιών χρησιμοποιεί επίσης ακέραιους αριθμούς.

$h(0) \approx 133945$ δίνει το απόθεμα ξυλείας το έτος 2000.

Βήμα 3: Καθορισμός του νόμου για την εκθετική μεταβολή

Η εργασία μας ζητά να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο $h(t) = h_0 \cdot a^t$.

Συμπληρώνοντας τις τιμές για h_0 και a και που μόλις υπολογίσαμε, ο νόμος της μεταβολής μπορεί να διατυπωθεί ως:

$$h(5) = 150\,000$$

$$h(10) = 168\,000$$

$$h(10) = h(5) \cdot a^5$$

$$168\,000 = 150\,000 \cdot a^5$$

$$a^5 = \frac{168\,000}{150\,000}$$

$$a = \sqrt[5]{\frac{168\,000}{150\,000}}$$

$$a \approx 1.0229$$

$$h(5) = h(0) \cdot a^5$$

$$150\,000 = h(0) \cdot 1.0229^5$$

$$\frac{150\,000}{1.0229^5} = h(0)$$

$$h(0) \approx 133945$$

$$h(t) = h_0 \cdot a^t$$

Αναπτυξιακός νόμος:

$$h(t) = 133\,945 \cdot 1.0229^t$$

Υπολογισμός τιμών t στον εκθέτη

Εργασία επίδειξης:

Μια βακτηριακή καλλιέργεια αυξάνεται κατά 80% κάθε ώρα. Στην αρχή, αποτελείται από 800 βακτήρια.

Υπολογίστε **πότε** ο αριθμός των βακτηρίων θα έχει δεκαπλασιαστεί!

Βήμα 1: διατυπώστε το νόμο της εκθετικής μεταβολής.

Δεδομένου ότι η βακτηριακή καλλιέργεια αυξάνεται κατά 80%, πρέπει να πολλαπλασιάσουμε με τον συντελεστή 1.80 για κάθε ώρα. Ως εκ τούτου, η παράμετρος a είναι

$$a = 1.80 \text{ (Επεξήγηση: } 100\% + 80\% = 180\% = \frac{180}{100} = 1.80)$$

Δεδομένου ότι στην αρχή υπάρχουν 800 βακτήρια, κάποιος παίρνει:

$$N_0 = 800$$

Βήμα 2: Υπολογίζοντας τον χρόνο t κατά τον οποίο ο αριθμός των βακτηρίων έχει δεκαπλασιαστεί $\rightarrow$ ψάχνουμε για τον εκθέτη που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον λογάριθμο $\rightarrow$

Στην αρχή, υπάρχουν 800 βακτήρια. Εάν αυτά δεκαπλασιαστούν, υπάρχουν βακτήρια $10 \cdot 800 \rightarrow N(t) = 10 \cdot 800$

Για να μάθετε το χρόνο t , $10 \cdot 800$ πρέπει να συμπληρωθεί στο νόμο της εκθετικής μεταβολής, και στη συνέχεια μπορεί να υπολογιστεί το t .

Μπορεί κανείς να δει ότι ο χρόνος t είναι ανεξάρτητος από την αρχική τιμή του αριθμού των βακτηρίων. Εξαρτάται μόνο από τον παράγοντα ανάπτυξης a !

$$N(t) = N_0 \cdot a^t$$

Αναπτυξιακός νόμος:

$$N(t) = 800 \cdot 1.80^t$$

$$N(t) = 8000 \text{ und}$$

$$N(t) = 800 \cdot 1.80^t$$

$$10 \cdot 800 = 800 \cdot 1.80^t \quad | :800$$

$$10 = 1.80^t \quad | \log$$

$$\log(10) = \log(1.80^t)$$

$$\log(10) = t \cdot \log(1.80) \quad | : \log(1.80)$$

$$t = \frac{\log(10)}{\log(1.80)}$$

$$t \approx 3.92 \text{ h}$$

2. Ανάλυση συνέντευξης

Η εκπαιδευτικός που δίδαξε αυτή την ενότητα έχει περισσότερα από 30 χρόνια διδακτικής εμπειρίας. Το δεύτερο θέμα της είναι η Γεωγραφία. Δεν έλαβε ιδιαίτερη εκπαίδευση σχετικά με τη διδασκαλία σε πολυπολιτισμικές τάξεις.

Η εκπαιδευτικός σχολίασε ιδιαίτερα την ενεργητική επίδραση που είχε αυτή η διδακτική ενότητα στους μαθητές. Περιέγραψε τους μαθητές σε αυτή την τάξη ως «όχι πραγματικά ενεργοποιημένους», και αυτό ήταν επίσης εμφανές στα πρώτα λεπτά του μαθήματος, όταν συζητήθηκε η συμπεριφορά των μαθητών (προφανώς όχι για πρώτη φορά). Κατά την εισαγωγή του θέματος και την παρουσίαση της εργασίας επίδειξης, το κίνητρο δεν φάνηκε να βελτιώνεται πολύ. Ωστόσο, μόλις οι μαθητές έλαβαν τα φύλλα εργασίας και άρχισαν να εργάζονται στις πραγματικές εργασίες, το κίνητρο αυξήθηκε σημαντικά και οι μαθητές εργάστηκαν με ενθουσιασμό. Η εκπαιδευτικός σχολίασε την έκπληξή της γι' αυτό και υπέθεσε ότι το πλαίσιο της ενότητας και η πραγματικότητα των έργων ήταν υπεύθυνα για αυτό.

Η εκπαιδευτικός ανέφερε ότι αυτή η ενότητα ήταν μια καλή επανάληψη των εκθετικών συναρτήσεων, για την καλύτερη προετοιμασία των μαθητών για την τελική εξέταση (στο τέλος αυτής της σχολικής χρονιάς). Σχολίασε ότι οι μαθητές πιθανότατα δεν θα είχαν ασχοληθεί τόσο πολύ με το θέμα παρά απλώς επαναλάμβαναν τις εξισώσεις ή χρησιμοποιούσαν το «τυπικό πλαίσιο» της ραδιενεργού διάσπασης.

3. Προτάσεις βελτίωσης

Ο δάσκαλος δεν συνέστησε συγκεκριμένες αλλαγές. Απλώς σχολίασε ότι ίσως οι δευτερεύουσες εργασίες α) και β) θα μπορούσαν ενδεχομένως να εναλλάσσονται μεταξύ τους, δεδομένου ότι ο υπολογισμός των σημείων του γραφήματος είναι πιθανώς ευκολότερος εάν η εξίσωση της συνάρτησης έχει καθοριστεί από πριν.