



Co-funded by
the European Union



Μελέτη περίπτωσης 03

Βασικά δεδομένα

Τίτλος Ερευνητικής Διδακτικής Ενότητας	Εφαρμογές διανυσμάτων στην καθημερινή ζωή (Χάρτες)
Ενότητα που δημιουργήθηκε από	BORG Deutsch-Wagram (AT)
Βασισμένο στην ιδέα	Ταξιδεύοντας στο χάρτη με διανύσματα
Η ιδέα δημιουργήθηκε από	Škola da Vinci (Τσεχία)
Ημερομηνία διδασκαλίας	20.11.2023
Αριθμός μαθητών στην τάξη	24
Αριθμός μεταναστών μαθητών	4

Χρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση. Ωστόσο, οι απόψεις και οι απόψεις που εκφράζονται είναι μόνο των συγγραφέων και δεν αντικατοπτρίζουν απαραίτητα εκείνες της Ευρωπαϊκής Ένωσης ή της OeAD-GmbH. Ούτε η Ευρωπαϊκή Ένωση ούτε η χορηγούσα αρχή μπορούν να θεωρηθούν υπεύθυνες γι' αυτές.

1. Περιγραφή Ερευνητικής Διδακτικής Ενότητας

Τίτλος	Εφαρμογές διανυσμάτων στην καθημερινή ζωή (Χάρτες)
Ηλικία μαθητών/τάξη	15 χρόνων
Διάρκεια της ενότητας	1 x 50 λεπτά
Μαθηματικό θέμα	Διανύσματα
Προαπαιτούμενες γνώσεις	<ul style="list-style-type: none">• Ιδιότητες των διανυσμάτων στο επίπεδο• Γραμμές στο αεροπλάνο• Παραμετρική αναπαράσταση γραμμής
Απαιτούμενα υλικά	<ul style="list-style-type: none">• Φύλλο εργασίας "Υπολογισμοί με διανύσματα στην Αυστρία" (1 αντίγραφο ανά μαθητή)• "Χάρτης της Αυστρίας" (ένας ανά ομάδα, ή εναλλακτικά τυπωμένος στο πίσω μέρος του φύλλου εργασίας για κάθε μαθητή)
Στόχοι	<ul style="list-style-type: none">• Εφαρμογή διανυσμάτων σε προβλήματα πραγματικής ζωής• Χρήση συντεταγμένων σε ρεαλιστικό χάρτη• Μοντελοποίηση με χρήση διανυσμάτων
Σημειώσεις σχετικά με την εργασία με μετανάστες μαθητές	<ul style="list-style-type: none">• Ως πιθανή επέκταση, κάθε ομάδα θα μπορούσε να δημιουργήσει τις δικές της εργασίες, χρησιμοποιώντας κατάλληλους χάρτες και ονόματα πόλεων από τις χώρες καταγωγής των μαθητών

Σχέδιο μαθήματος:

Το μάθημα σχεδιάζεται για το τέλος του θέματος "διανύσματα στο επίπεδο" και "γραμμές στο επίπεδο".

Ώρα	Μέθοδος	Περιεχόμενο και σχόλια
περίπου 10 λεπτά	Παρουσίαση και επικοινωνία Δάσκαλου -μαθητή	Ο/η εκπαιδευτικός παρακινεί τους μαθητές να εμπλακούν στο θέμα του μαθήματος, περιγράφοντας τη σημασία των ποσοστών στην καθημερινή ζωή. Ο/η εκπαιδευτικός μαζί με τους μαθητές, επαναλαμβάνει τις κύριες έννοιες και ιδιότητες των διανυσμάτων (ανάγνωση των συντεταγμένων του διανύσματος από μια γραφική παράσταση, μέτρο διανύσματος, παραμετρική αναπαράσταση μιας γραμμής). Αυτό θα μπορούσε επίσης να καταγραφεί στον μαυροπίνακα
περίπου 25 λεπτά	Ομαδοσυνεργατική	Οι μαθητές επιλύουν τις εργασίες του φύλλου εργασίας ομαδοσυνεργατικά (2 μαθητές). Ο/η εκπαιδευτικός υποστηρίζει τις ομάδες αν χρειαστεί.
περίπου 15 λεπτά	Επικοινωνία Δάσκαλου -μαθητή	Σύγκριση των αποτελεσμάτων

Υπολογισμοί με διανύσματα στην Αυστρία – Φύλλο εργασίας

Το δεδομένο σχήμα δείχνει τον χάρτη της Αυστρίας σε ένα δισδιάστατο σύστημα συντεταγμένων. Σε αυτό το σχήμα, φαίνονται ορισμένες πόλεις της Αυστρίας και της γειτονικής της χώρας Γερμανίας, όπως οι πόλεις της Βιέννης, του Γκρατς, του Λιντς, του Σάλτσμπουργκ, του Ίνσμπρουκ, του Μονάχου και πολλών άλλων. Οι συντεταγμένες των πόλεων δεν χρειάζεται να είναι ακέραιοι αριθμοί.

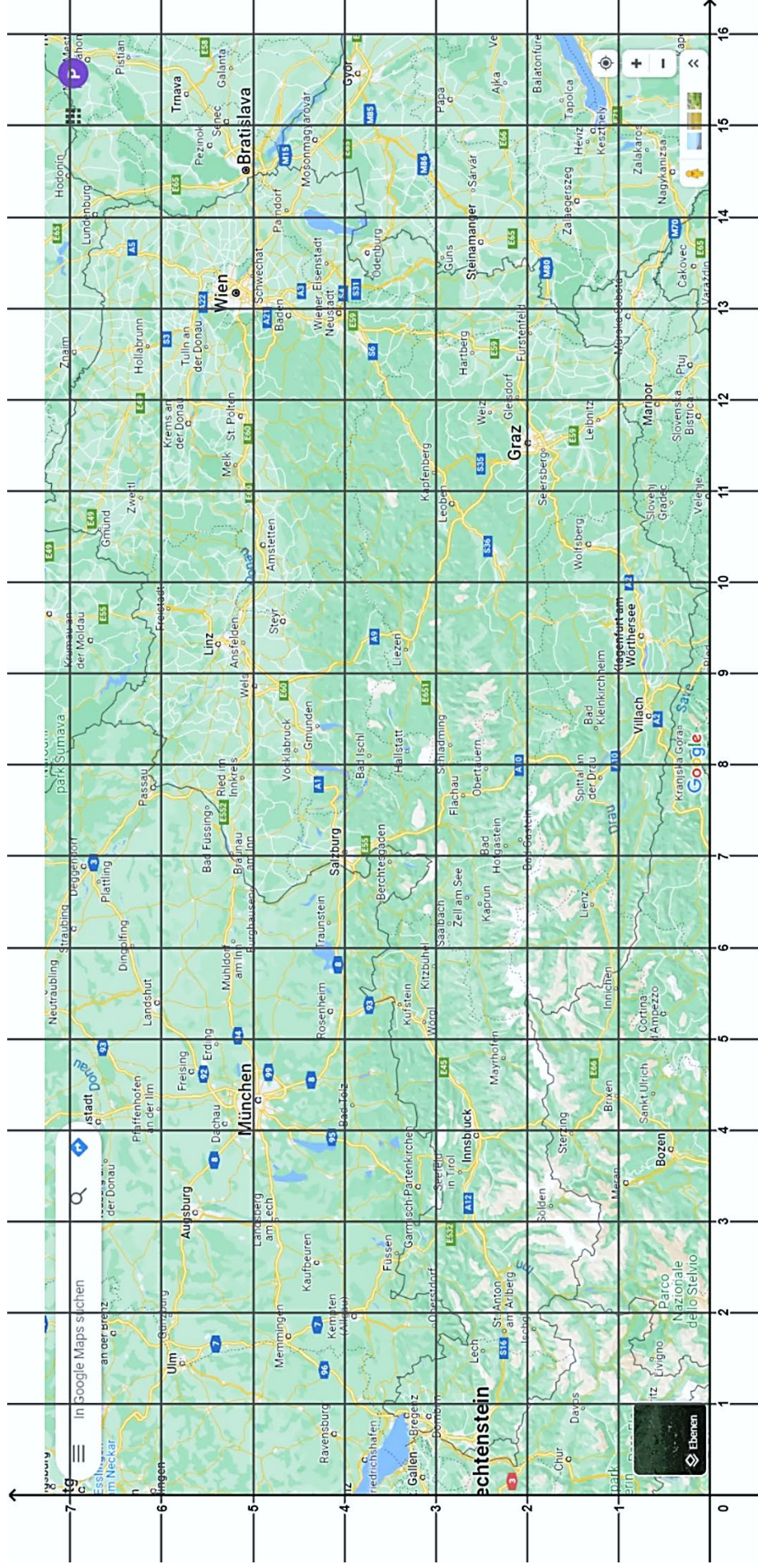
Εργασία 1:

- a) Υποδείξτε σε ποια πόλη βρίσκεται κάποιος, όταν ξεκινά από το Σάλτσμπουργκ, η κίνηση γίνεται κατά μήκος του διανύσματος $\vec{u} = (4, 5 | -2)$ και στη συνέχεια κατά μήκος του διανύσματος $\vec{v} = (5 | 0)$.
- _____
- b) Χρησιμοποιήστε διανυσματικό λογισμό για να προσδιορίσετε την απόσταση μεταξύ Βιέννης και Γκρατς.
- c) Εξετάστε την απόσταση μεταξύ των πόλεων Μόναχο και Βιέννη. Το τμήμα MV διαιρείται με το σημείο T σε αναλογία 5: 4. Διαμορφώστε μια εξίσωση για να υπολογίσετε το σημείο T και να υποδείξετε σε ποιο μέρος (πόλη) βρίσκεται (περίπου) αυτό το σημείο στο χάρτη.
- $T =$ _____ Πόλη: _____

Εργασία 2:

- a) Δημιουργία παραμετρικής αναπαράστασης μιας γραμμής μεταξύ των πόλεων του Σάλτσμπουργκ και της Βιέννης. Χρησιμοποιήστε ένα διάνυσμα κατεύθυνσης που έχει ακέραιες συντεταγμένες.
- b) Δημιουργία εξίσωσης (κανονική διανυσματική αναπαράσταση) της γραμμής από την εργασία 2α)
- c) Η γραμμή, που διέρχεται από τις πόλεις του Μονάχου και του Λιντς, δίνεται από:
- $$g: X = \begin{pmatrix} 4.3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 25 \\ 2 \end{pmatrix}$$
- 1) Σχεδιάστε μια γραμμή h παράλληλη στη g και διερχόμενη από την πόλη του Σάλτσμπουργκ.
- 2) Σχεδιάστε μια γραμμή i που να είναι κάθετη στην g και να διέρχεται από την πόλη του Σάλτσμπουργκ.

Χάρτης Αυστρία



1 μονάδα στο σύστημα συντεταγμένων αντιστοιχεί σε περίπου 52 km στην πραγματικότητα

Υπολογισμοί με διανύσματα στην Αυστρία – Φύλλο εργασίας με λύσεις

Το δεδομένο σχήμα δείχνει τον χάρτη της Αυστρίας σε ένα δισδιάστατο σύστημα συντεταγμένων. Σε αυτό το σχήμα, φαίνονται ορισμένες πόλεις της Αυστρίας και της γειτονικής της χώρας Γερμανίας, όπως οι πόλεις της Βιέννης, του Γκρατς, του Λιντς, του Σάλτσμπουργκ, του Ίνσμπρουκ, του Μονάχου και πολλών άλλων. Οι συντεταγμένες των πόλεων δεν χρειάζεται να είναι ακέραιοι.

Εργασία 1:

- d) Υποδείξτε σε ποια πόλη βρίσκεται κάποιος, όταν ξεκινά από το Σάλτσμπουργκ, η κίνηση γίνεται κατά μήκος του διανύσματος $\vec{u} = (4,5|-2)$ και στη συνέχεια κατά μήκος του διανύσματος $\vec{v} = (5|0)$

Villach

- e) Χρησιμοποιήστε διανυσματικό λογισμό για να προσδιορίσετε την απόσταση μεταξύ Βιέννης και Γκρατς.

Συντεταγμένες Βιέννης: $V = (13.2|5.2)$ και Γκρατς $G = (11.5|2)$

$$\overrightarrow{VG} = G - V = \begin{pmatrix} 11.5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 13.2 \\ 5.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.7 \\ -3.2 \end{pmatrix} \text{ και } \left| \begin{pmatrix} -1.7 \\ -3.2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-1.7)^2 + (-3.2)^2} = \sqrt{13.13} \approx 3.62$$

Απόσταση στην πραγματικότητα: $3.62 \cdot 52 \text{ km} = 188.24 \text{ km}$

- f) Εξετάστε την απόσταση μεταξύ των πόλεων Μόναχο M και Βιέννη V . Το τμήμα MV διαιρείται με το σημείο T σε αναλογία 5: 4. Ορίστε μια εξίσωση για να υπολογίσετε το σημείο T και να υποδείξετε σε ποιο μέρος (πόλη) βρίσκεται (περίπου) αυτό το σημείο στο χάρτη.

$$T = M + \frac{5}{9} \cdot \overrightarrow{MV} \quad \text{Πόλη: Ansfelden}$$

Εργασία 2:

- a) Δημιουργία παραμετρικής αναπαράστασης μιας γραμμής μεταξύ των πόλεων του Σάλτσμπουργκ και της Βιέννης. Χρησιμοποιήστε ένα διάνυσμα κατεύθυνσης με ακέραιες συντεταγμένες.

Συντεταγμένες Βιέννης και Σάλτσμπουργκ $V = (13.2|5.2)$, $S = (7|4)$

$$\overrightarrow{SV} = V - S = \begin{pmatrix} 13.2 \\ 5.2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.2 \\ 1.2 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 62 \\ 12 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 31 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$u: X = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 31 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \dots \text{Παραμετρική αναπαράσταση γραμμής } u$$

- b) Ορισμός εξίσωσης (κάθετη διανυσματική αναπαράσταση) της γραμμής από την εργασία 2α)

Το κατά κατεύθυνση διάνυσμα της γραμμής u είναι $\begin{pmatrix} 31 \\ 6 \end{pmatrix}$. Ένα κάθετο διάνυσμα της γραμμής u είναι

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -31 \end{pmatrix} \dots \text{Γραμμική εξίσωση: } \vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot S$$

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -31 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 6 \\ -31 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow 6x - 31y = 6 \cdot 7 + (-31) \cdot 4 \rightarrow 6x - 31y = -82$$

- c) Η γραμμή g , που διέρχεται από τις πόλεις του Μονάχου και του Λιντς, δίνεται από:

$$g: X = \begin{pmatrix} 4.3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 25 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- 1) Σχεδιάστε μια γραμμή h παράλληλη στη g και διερχόμενη από την πόλη του Σάλτσμπουργκ.

$$h: X = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 25 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- 2) Σχεδιάστε μια γραμμή i που είναι κάθετη στη g και να διέρχεται από την πόλη του Σάλτσμπουργκ.

$$i: X = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -25 \end{pmatrix}$$

2. Ανάλυση συνέντευξης

Η εκπαιδευτικός που δίδαξε αυτή την ενότητα έχει περισσότερα από 30 χρόνια διδακτικής εμπειρίας. Το δεύτερο διδακτικό της αντικείμενο είναι η Γεωγραφία. Δεν έλαβε ιδιαίτερη εκπαίδευση σχετικά με τη διδασκαλία σε πολυπολιτισμικές τάξεις.

Η εκπαιδευτικός θεώρησε το προτεινόμενο χρονικό πλαίσιο (50 λεπτά) επαρκές για την εκτέλεση όλων των δραστηριοτήτων. Λόγω της εκτεταμένης εμπειρίας της ως καθηγήτρια Γεωγραφίας, συμπεριέλαβε ενδιαφέροντα στοιχεία στο μάθημα σχετικά με τον χάρτη και τις πόλεις που αναφέρθηκαν στις διάφορες δραστηριότητες. Σχολίασε επίσης το γεγονός ότι το επιλεγμένο μήκος πλέγματος του χάρτη (52 χλμ.) δεν είναι φυσικά ρεαλιστικό στους πραγματικούς χάρτες, αλλά ότι αυτό το μήκος επιλέχθηκε έτσι ώστε οι θέσεις που χρησιμοποιούνται στις δραστηριότητες να βρίσκονται (τουλάχιστον περίπου) σε σημεία πλέγματος και έτσι οι συντεταγμένες τους να διαβάζονται εύκολα από τους μαθητές.

Η εκπαιδευτικός σχολίασε επίσης θετικά το γεγονός ότι αυτή η ενότητα εισήγαγε στους μαθητές σε περιοχές της Αυστρίας που είναι λιγότερο γνωστές. Επίσης, αναφέρθηκε θετικά το γεγονός ότι ο διανυσματικός λογισμός χρησιμοποιείται σε πραγματικό περιβάλλον.

Η πιθανή επέκταση (δουλεύοντας με χάρτες των χωρών καταγωγής των μεταναστών μαθητών και βάζοντάς τους να δημιουργήσουν τις δικές τους εργασίες) αναφέρθηκε ως καλή ιδέα, ωστόσο θα απαιτούσε τουλάχιστον ένα ακόμη μάθημα.

3. Προτάσεις βελτίωσης

Ο/η εκπαιδευτικός συνέστησε δύο βελτιώσεις στη μονάδα:

Πρώτον, θα προσθέσει στην εργασία 2γ) την υπο-εργασία ότι οι μαθητές (αν χρειαστεί με τη βοήθεια του δασκάλου) θα πρέπει να ερμηνεύσουν τις γραμμές που πρόκειται να υπολογιστούν εκεί. Ποιο είναι το νόημά τους στο δεδομένο πλαίσιο;

Δεύτερον, θα πρότεινε να δοθεί μια συγκεκριμένη μέθοδος για τη «σύγκριση των αποτελεσμάτων» ως τελική δραστηριότητα του μαθήματος. Πρότεινε ιδιαίτερα να γράψετε τη σωστή απάντηση στον πίνακα (και όχι μόνο να χρησιμοποιήσετε λεκτική επικοινωνία δασκάλου-μαθητή-όπως προτείνεται) έτσι ώστε όλοι οι μαθητές να έχουν διαθέσιμες τις σωστές απαντήσεις.