



Co-funded by
the European Union



Μελέτη περίπτωσης 06

Βασικά δεδομένα

Τίτλος Ερευνητικής Διδακτικής Ενότητας	Αναπαράσταση στερεών στο επίπεδο
Ενότητα που δημιουργήθηκε από	BORG Deutsch-Wagram (AT)
Βασισμένο στην ιδέα	Ισομετρίες στο επίπεδο
Η έννοια που δημιουργήθηκε από	Fondazione A.R.E.A. (IT)
Ημερομηνία διδασκαλίας	22.03.2024
Αριθμός μαθητών στην τάξη	18
Αριθμός μεταναστών φοιτητών	7

Χρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση. Ωστόσο, οι απόψεις και οι απόψεις που εκφράζονται είναι μόνο των συγγραφέων και δεν αντικατοπτρίζουν απαραίτητα εκείνες της Ευρωπαϊκής Ένωσης ή της OeAD-GmbH. Ούτε η Ευρωπαϊκή Ένωση ούτε η χορηγούσα αρχή μπορούν να θεωρηθούν υπεύθυνες γι' αυτές.

1. Περιγραφή Ερευνητικής Διδακτικής Ενότητας

Τίτλος	Αναπαράσταση στερεών στο επίπεδο
Ηλικία μαθητών/τάξη	13 χρόνων
Μήκος της μονάδας	3 x 50 λεπτά
Μαθηματικό θέμα	Ισομετρίες στο επίπεδο
Προαπαιτούμενες γνώσεις	<ul style="list-style-type: none">• Ιδιότητες βασικών στερεών (κύβος, διάφορες μορφές πρισμάτων, κύλινδρος, πυραμίδα, κώνος, σφαίρα)• Εργασία με εξισώσεις και μεταβλητές
Απαιτούμενα υλικά	<ul style="list-style-type: none">• Φύλλο πληροφοριών 1 (για το μάθημα 1)• Φύλλο εργασίας 1 (για το μάθημα 1)• Φύλλο εργασίας 2 (για το μάθημα 2)• Φύλλο πληροφοριών 2 (για το μάθημα 3)• Φύλλο εργασίας 3 (για το μάθημα 3)
Στόχοι	<p>Ο/η μαθητής/τρια να:</p> <ul style="list-style-type: none">• γνωρίζει τις εξισώσεις για την επιφάνεια και τον όγκο του κύβου, του κυβοειδούς, του κυλίνδρου, της τετραγωνικής πυραμίδας, του κώνου και της σφαίρας• μπορεί να κατασκευάσει μια κεκλιμένη παράλληλη προβολή με δεδομένη γωνία και δεδομένο συντελεστή (σχεδίαση σε προοπτική σμίκρυνση) ενός κύβου και ενός κυβοειδούς
Σημειώσεις σχετικά με την εργασία με μετανάστες μαθητές	<ul style="list-style-type: none">• Για την 4η εργασία, οι μαθητές (μετανάστες και μη) θα σκεφτούν ένα τυπικό αντικείμενο της χώρας καταγωγής τους (ή της οικογένειάς τους), το οποίο θα έχει ένα βασικό γεωμετρικό σχήμα. Οι μαθητές μπορούν να εξηγήσουν εν συντομία τι είναι αυτό το αντικείμενο ή γιατί το επέλεξαν

Σχέδιο μαθήματος:

Μάθημα 1 (50 λεπτά)

Ώρα	Μέθοδος	Περιεχόμενο και σχόλια
περίπου 30 λεπτά	Εργασία σε μικρές ομάδες και στη συνέχεια παρουσίαση των αποτελεσμάτων σε όλη την τάξη	Επανάληψη ιδιοτήτων γεωμετρικών στερεών. έρευνα σχετικά με πραγματικά κτίρια (διαδίκτυο). Γίνεται σύνδεση με τα μαθηματικά (φύλλο εργασίας 1).
περίπου 20 λεπτά	Παρουσίαση και επικοινωνία Δάσκαλου - μαθητή	Ο/η εκπαιδευτικός εξηγεί τη διαδικασία κατασκευής μιας κεκλιμένης παράλληλης προβολής, καθώς και τις εξισώσεις για την επιφάνεια και τον όγκο ενός κύβου και ενός κυβοειδούς, χρησιμοποιώντας το φύλλο πληροφοριών 1. Οι μαθητές μπορούν να κάνουν ερωτήσεις.

Μάθημα 2 (50 λεπτά)

Ώρα	Μέθοδος	Περιεχόμενο και σχόλια
περίπου 20 λεπτά	Εργασία στην ολομέλεια της τάξης επικοινωνία Δάσκαλου -μαθητή	Επίλυση της εργασίας 2 (δάσκαλος, μαζί με όλη την τάξη).
περίπου 30 λεπτά	Ομαδοσυνεργατική, εργασία στην ολομέλεια της τάξης, συζήτηση	Επίλυση της εργασίας 3 (σε ζεύγη), στη συνέχεια έλεγχος λύσεων στην ολομέλεια της τάξης. Συζήτηση σχετικά με τα "τυπικά αντικείμενα" που επιλέχθηκαν στην εργασία 3β).

Εργασία για το σπίτι: Κάθε μαθητής πρέπει να σκεφτεί ένα χαρακτηριστικό αντικείμενο της χώρας καταγωγής του (ή της οικογένειάς του) που αντιπροσωπεύει ένα γεωμετρικό σχήμα. Θα πρέπει επίσης να ανακαλύψουν τις διαστάσεις αυτού του αντικειμένου (π.χ. μέσω του διαδικτύου ή μετρώντας το αντικείμενο στο σπίτι. Αν αυτό δεν είναι δυνατό, οι μαθητές θα πρέπει να εφεύρουν ρεαλιστικές μετρήσεις). Οι μαθητές είναι ευπρόσδεκτοι να τραβήξουν μια φωτογραφία του αντικειμένου ή ακόμα και να φέρουν τα επιλεγμένα αντικείμενα στην τάξη.

Μάθημα 3 (50 λεπτά)

Ώρα	Μέθοδος	Περιεχόμενο και σχόλια
περίπου 20 λεπτά	Παρουσίαση και επικοινωνία Δάσκαλου -μαθητή	Ο/η εκπαιδευτικός εξηγεί τις εξισώσεις για την επιφάνεια και τον όγκο του κυλίνδρου, της τετραγωνικής πυραμίδας, του κώνου και της σφαίρας, χρησιμοποιώντας το φύλλο πληροφοριών 2. Οι μαθητές μπορούν να κάνουν ερωτήσεις.
περίπου 30 λεπτά	Ομαδοσυνεργατική, παρουσίαση αποτελεσμάτων σε όλη την τάξη	Οι μαθητές εργάζονται στην εργασία 4 σε ομάδες (2 μαθητές), στη συνέχεια παρουσιάζουν τα αποτελέσματά τους στην ολομέλεια της τάξης (εάν οι μαθητές χρειάζονται περισσότερο χρόνο για την εργασία, τότε η παρουσίαση των αποτελεσμάτων μπορεί επίσης να πραγματοποιηθεί στο επόμενο μάθημα).

Φύλλο εργασίας 1

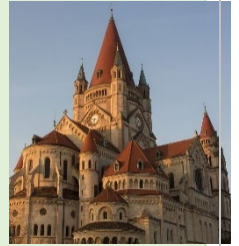
Δραστηριότητα 1 (εργασία σε μικρές ομάδες, στη συνέχεια παρουσίαση των αποτελεσμάτων σε όλη την τάξη):

Κάθε μαθητής της ομάδας σκέφτεται ένα κτίριο/αξιοθέατο από τη χώρα προέλευσής του που περιέχει γεωμετρικά στερεά! Τα γεωμετρικά στερεά πρέπει επίσης να ονομαστούν! Επιτρέπεται η χρήση του διαδικτύου! Κάθε μαθητής θα πρέπει επίσης να εξηγήσει εν συντομία το κτίριο "του" σε 2-3 προτάσεις.

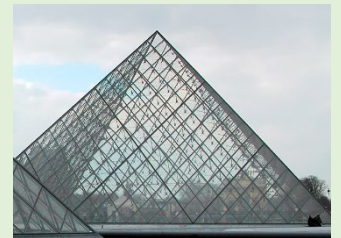
Εάν όλοι (ή οι περισσότεροι) μαθητές έχουν την ίδια χώρα καταγωγής, μπορούν να επιλέξουν χώρες όπου επισκέφθηκαν ή όπου ζουν μέλη της οικογένειάς τους.

Παραδείγματα:

- a) Εκκλησία "Άγιος Φραγκίσκος της Ασίζης" στη Βιέννη (οι κορυφές των πύργων είναι κώνοι)
Βρίσκεται στην Mexikorplatz (πλατεία του Μεξικού), ακριβώς στον ποταμό Δούναβη. Ο θεμέλιος λίθος τέθηκε στην 50ή επέτειο της ενθρόνισής του αυτοκράτορα Φραγκίσκου Ιωσήφ. Είναι μια ρωμαιοκαθολική ενοριακή εκκλησία.



- b) Γυάλινη πυραμίδα στο Παρίσι
Χρησιμεύει ως η κύρια είσοδος του Μουσείου του Λούβρου στη Γαλλική πρωτεύουσα, στο Παρίσι.



Ενημερωτικό δελτίο 1

Η εστίαση τώρα είναι στη δημιουργία μιας κεκλιμένης παράλληλης προβολής και στον υπολογισμό της επιφάνειας και του όγκου ενός κύβου και κυβοειδούς:

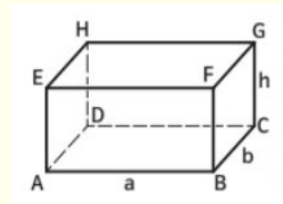
Ένα σχέδιο δείχνει πάντα ένα στερεό από μία μόνο γωνία. Το στερεό, δηλαδή ένα αντικείμενο στο χώρο, απεικονίζεται ως επίπεδη φιγούρα στο χαρτί σχεδίασης. Για να επιτευχθεί η αποτύπωση στο σχέδιο, χρησιμοποιείται συχνά η λεγόμενη κεκλιμένη παράλληλη προβολή. Σε αυτόν τον τύπο αναπαράστασης, οι μεμονωμένες επιφάνειες και οι ακμές του στερεού έχουν διαφορετικά σχήματα ή μήκη.

Επεξήγηση: Η μπροστινή και η πίσω επιφάνεια σχεδιάζονται σε πραγματικό μέγεθος. Οι πλευρικές ακμές που πάνε διαγώνια προς τα πίσω είναι μικρότερου μήκους. Δουλεύουμε με τη γωνία παραμόρφωσης $\alpha = 45^\circ$ (γωνία στην οποία σχεδιάζεται η πλάγια ακμή) και τον συντελεστή σμίκρυνσης που ονομάζεται επίσης σμίκρυνση, $\nu = 0.5$ (δηλαδή σμίκρυνσης κατά το ήμισυ, αυτός είναι ο παράγοντας με τον οποίο πολλαπλασιάζεται το μήκος της πλάγιας ακμής). Οι αόρατες ακμές σχεδιάζονται ως διακεκομμένη γραμμή. Αυτό δίνει μια αναπαράσταση που ανταποκρίνεται καλά στην πραγματικότητα

Για κυβοειδές με επιφάνεια βάσης G ισχύουν τα εξής:

$$\text{Επιφάνεια } A = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot h + 2 \cdot b \cdot h = 2 \cdot G + M$$

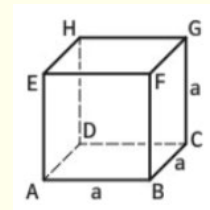
$$\text{Τόμος: } V = a \cdot b \cdot h = G \cdot h$$



Για έναν **κύβο** με επιφάνεια βάσης G ισχύουν τα εξής:

$$\text{Επιφάνεια } A = 6 \cdot a \cdot a$$

$$\text{Τόμος: } V = a \cdot a \cdot a = G \cdot a$$



Φύλλο εργασίας 2

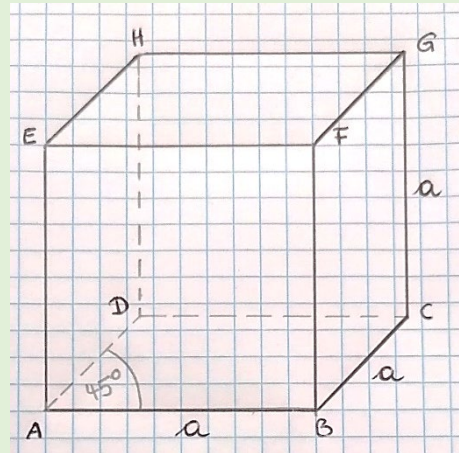
Δραστηριότητα 2 (εργασία σε όλη την τάξη):

Κατασκευάστε την πλάγια παράλληλη προβολή ενός κύβου με μήκος πλευράς, $a = 5\text{ cm}$

Υπολογίστε την επιφάνεια καθώς και τον όγκο του κύβου

$$\text{Επιφάνεια } A = 6 \cdot a \cdot a = 6 \cdot 5 \cdot 5 = 150\text{ cm}^2$$

$$\text{Τόμος: } V = a \cdot a \cdot a = G \cdot a = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125\text{ cm}^3$$



Εργασία 3 (εργασία σε ομάδες):

- a) Κυβοειδές: Κατασκευάστε την πλάγια παράλληλη προβολή ενός κυβοειδούς με πλευρές $a = 7\text{ cm}$, $b = 4\text{ cm}$, χρησιμοποιώντας τη γωνία $\alpha = 45^\circ$ και τη σμίκρυνση, $v = 0.5$

Υπολογίστε την επιφάνεια και τον όγκο αυτού του κυβοειδούς!

Σκεφτείτε 2 αντικείμενα από την καθημερινή ζωή που θα μπορούσαν να έχουν περίπου το σχήμα αυτού του κυβοειδούς!

- b) Κύβος: Κατασκευάστε την πλάγια παράλληλη προβολή ενός κύβου με μήκος πλευράς $a = 7\text{ cm}$. Χρησιμοποιήσε $\alpha = 45^\circ$ και $v = 0.5$

Υπολογίστε την επιφάνεια και τον όγκο αυτού του κύβου!

Σκεφτείτε 2 αντικείμενα από την καθημερινή ζωή που θα μπορούσαν να έχουν περίπου το σχήμα αυτού του κύβου!

Ενημερωτικό φυλλάδιο 2

Για την περαιτέρω εμβάθυνση του θέματος των γεωμετρικών στερεών, συζητούνται τώρα λεπτομερέστερα οι επιφάνειες και οι όγκοι των ακόλουθων στερεών: Κύλινδρος, τετραγωνική πυραμίδα, κώνος, σφαίρα.

Σημείωση: Οι μαθητές είναι ήδη εξοικειωμένοι με τις ιδιότητες των γεωμετρικών στερεών. Οι μαθητές είναι επίσης εξοικειωμένοι με τους όρους $h_a, s, \dots$. Χρησιμοποιώντας μια μορφή αντιστοίχισης, οι μαθητές θα πρέπει να επεξεργαστούν μόνοι τους πώς είναι οι αντίστοιχες εξισώσεις.

- Κύλινδρος:

Επιφάνεια:

Όγκος:

$$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$$

$$A = a^2 + 2 \cdot a \cdot h_a$$

- Τετράγωνη πυραμίδα:

Επιφάνεια:

Όγκος:

$$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$$

$$A = 2 \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h$$

- Κώνος:

Επιφάνεια:

Όγκος:

$$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$$

$$A = 4 \cdot r^2 \cdot \pi$$

- Σφαίρα:

Επιφάνεια:

Όγκος:

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h$$

$$A = r^2 \cdot \pi + r \cdot \pi \cdot s$$

Φύλλο εργασίας 3

Δραστηριότητα 4 (εργασία σε μικρές ομάδες, στη συνέχεια παρουσίαση των αποτελεσμάτων στην ολομέλεια της τάξης):

Κάθε μαθητής πρέπει να σκεφτεί ένα τυπικό αντικείμενο της χώρας καταγωγής του (ή της οικογένειάς του) που αντιπροσωπεύει ένα γεωμετρικό σχήμα (αυτή ήταν η εργασία). Ο παρακάτω πίνακας πρέπει να συμπληρωθεί στη μικρή ομάδα. Τα αποτελέσματα θα πρέπει στη συνέχεια να παρουσιαστούν στον πίνακα σε όλη την τάξη. Οι μαθητές ενθαρρύνονται να πάρουν τα επιλεγμένα αντικείμενα στην τάξη και (αν είναι βρώσιμα) ακόμη και να τα δοκιμάσουν.

Η πρώτη γραμμή δείχνει ένα παράδειγμα για ένα τυπικό αντικείμενο από την Αυστρία.

Αντικείμενο	Στερεό	Διαστάσεις	Αριθμός Κορυφών	Αριθμός ακμών	Αριθμός Εδρών	Εμβαδόν επιφάνειας	Όγκος
 Manner-Schnitten (τυπικές βιεννέζικες γκοφρέτες)	Κυβοειδές	$a = 97$ $b = 84$ $h = 15$ (mm)	8	12	6	$A =$ $= 2 \cdot 97 \cdot 84$ $+$ $2 \cdot 97 \cdot 15$ $+$ $2 \cdot 84 \cdot 15$ $= 21726 \text{ mm}^2$	$V = 97 \cdot 84 \cdot 15$ $= 122220 \text{ mm}^3$ $= 122.22 \text{ cm}^3$

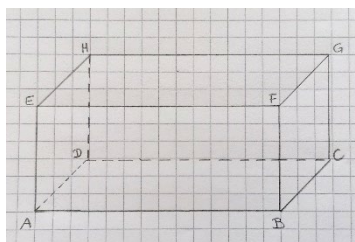
Λύσεις

Εργασία 3:

a)

$$A = 2 \cdot 7 \cdot 4 + 2 \cdot 7 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 3 = 122 \text{ cm}^2$$

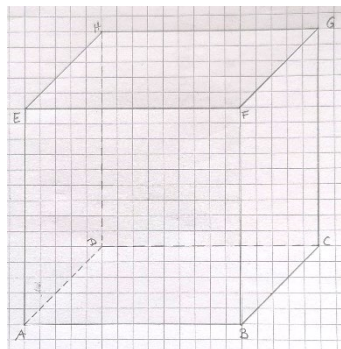
$$V = 7 \cdot 4 \cdot 3 = 84 \text{ cm}^3$$



b)

$$A = 6 \cdot 7^2 = 294 \text{ cm}^2$$

$$V = 7^3 = 343 \text{ cm}^3$$



Ενημερωτικό φυλλάδιο 2:

- Κύλινδρος:

Επιφάνεια:

$$A = 2 \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h$$

Όγκος:

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h$$

- Τετράγωνη πυραμίδα:

Επιφάνεια:

$$A = a^2 + 2 \cdot a \cdot h_a$$

Όγκος:

$$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$$

- Κώνος:

Επιφάνεια:

$$A = r^2 \cdot \pi + r \cdot \pi \cdot s$$

Όγκος:

$$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$$

- Σφαίρα

Επιφάνεια:

$$A = 4 \cdot r^2 \cdot \pi$$

Όγκος:

$$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$$

2. Ανάλυση συνέντευξης

Ο εκπαιδευτικός που διδάσκει αυτή την ενότητα έχει 12ετή διδακτική εμπειρία. Το δεύτερο γνωστικό του αντικείμενο είναι η Φυσική Αγωγή (Αθλητισμός). Δεν έλαβε ιδιαίτερη εκπαίδευση σχετικά με τη διδασκαλία σε πολυπολιτισμικές τάξεις.

Ο εκπαιδευτικός σχολίασε πολύ θετικά την εργασία 1 (στερεά στον πραγματικό κόσμο). Ετοίμασε μερικές εικόνες κτιρίων για να τις εισαγάγει στην τάξη σε περίπτωση που οι μαθητές δεν έβρισκαν κατάλληλες φωτογραφίες στο διαδίκτυο, αλλά δεν τις χρησιμοποίησε για το πραγματικό μάθημα, αφού οι μαθητές μπόρεσαν να βρουν έναν ικανοποιητικό αριθμό εικόνων για να χρησιμοποιηθούν για αυτή την εργασία. Είπε ότι θα προτιμούσε να συνεχίσει να εργάζεται με τα αντικείμενα που βρέθηκαν στην εργασία 1 και τελικά να επιστρέψει σε αυτά μετά την εισαγωγή της κεκλιμένης παράλληλης προβολής.

Ο εκπαιδευτικός περιέγραψε το μάθημα 2 (ασκήσεις 2 και 3) ως αρκετά τυποποιημένο και πολύ παρόμοιο με αυτό που προτείνεται στο βιβλίο που χρησιμοποιεί τακτικά για τη διδασκαλία. Είπε ότι οι μαθητές ήταν αρκετά δημιουργικοί στην εργασία 3β (εύρεση αντικειμένων καθημερινής ζωής σε σχήμα κύβου), αν και ως επί το πλείστον ονόμασαν αντικείμενα που είναι στην πραγματικότητα κυβοειδή.

Ο εκπαιδευτικός δεν ήταν ακριβώς σίγουρος πώς να εργαστεί πρακτικά με το φύλλο πληροφοριών 2. Εάν διανεμηθεί σε έντυπη μορφή (όπως αρχικά σκόπευε να κάνει), οι μαθητές θα πρέπει να κόψουν τις εξισώσεις, να τις ταιριάξουν και να τις κολλήσουν στο σημειωματάριό τους. Εάν προβάλλεται σε μια οθόνη ως αρχείο λέξης και στη συνέχεια δουλεύεται σε μια ολόκληρη τάξη (κάτι που κατέληξε να κάνει), οι μαθητές θα πρέπει να γράψουν όλες τις εξισώσεις με τη σωστή σειρά στα σημειωματάριά τους, κάτι που είναι επιρρεπές σε σφάλματα. Μια άλλη δυνατότητα θα ήταν να εργαστεί κανείς στο αρχείο σε ολόκληρη την τάξη για να καθορίσει τη σωστή αντιστοίχιση και, στη συνέχεια, να διανείμει ένα έντυπο αντίγραφο που να περιέχει τη σωστή αντιστοίχιση στους μαθητές.

Ο εκπαιδευτικός είπε ότι οι μαθητές απόλαυσαν πολύ την εργασία 4. Οι μαθητές βρήκαν μια σειρά από διαφορετικά αντικείμενα, και μερικοί πραγματικά έφεραν κάποια αντικείμενα στην τάξη. Σχολίασε ιδιαίτερα τον θετικό αντίκτυπο αυτής της δραστηριότητας σε ορισμένους από τους μετανάστες μαθητές. Ειδικά σχολίασε ένα αγόρι, το οποίο περιέγραψε ως «συνήθως πολύ συνεσταλμένο και συγκρατημένο». Αυτός ο μαθητής έφερε ένα αντικείμενο από την οικογένειά του και το παρουσίασε με υπερηφάνεια πρώτα στην ομάδα και στη συνέχεια σε όλη την τάξη. Ο δάσκαλος είπε ότι θα ήταν καλό να κάνουμε περισσότερες συνδέσεις με το υπόβαθρο των μαθητών.

3. Προτάσεις βελτίωσης

Ο εκπαιδευτικός συνέστησε αρκετές βελτιώσεις στην ενότητα:

Αρχικά, θα πρότεινε να χρησιμοποιηθούν τα αντικείμενα (κτίρια με γεωμετρικά σχήματα) της εργασίας 1 και να δουλέψουν μαζί τους στο μάθημα 2, δηλαδή να αφήσουν τους μαθητές να δημιουργήσουν πλάγιες παράλληλες προβολές αυτών των αντικειμένων αντί για γενικές αφηρημένες όπως γίνεται σήμερα.

Ο εκπαιδευτικός πρότεινε επίσης να καταστεί πιο σαφές πώς να εργαστούν με το φύλλο πληροφοριών 2 στο μάθημα 3. Είτε θα εργαζόταν σε αυτό σε ένα περιβάλλον ολόκληρης της τάξης και στη συνέχεια θα διένειμε μια σωστή λύση της αντίστοιχης εργασίας στους μαθητές, είτε θα άφηνε τους μαθητές να εργαστούν απευθείας στο ηλεκτρονικό αρχείο που θα μπορούσε να διανεμηθεί μέσω του Moodle. Θεώρησε ανέφικτη τη χρήση μιας έντυπης έκδοσης για την πραγματική άσκηση αντιστοίχισης. Ανεξάρτητα από τον τρόπο χρήσης, προτείνει στους μαθητές να έχουν ένα ενημερωτικό δελτίο με τις σωστές αντιστοιχίες στο τέλος του μαθήματος.