



Co-funded by
the European Union



Μελέτη περίπτωσης 07

Βασικά δεδομένα

Τίτλος Ερευνητικής Διδακτικής Ενότητας	Μαθηματικά στο παρτέρι
Μονάδα που δημιουργήθηκε από	BORG Deutsch-Wagram (AT)
Βασισμένο στην ιδέα	Πράσινη Γεωμετρία
Η έννοια δημιουργήθηκε από	Istituto Comprensivo Statale "Malaspina" Massa (IT)
Ημερομηνία διδασκαλίας	13.05.2024
Αριθμός μαθητών στην τάξη	11
Αριθμός μεταναστών μαθητών	1

Χρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση. Ωστόσο, οι απόψεις και οι απόψεις που εκφράζονται είναι μόνο των συγγραφέων και δεν αντικατοπτρίζουν απαραίτητα εκείνες της Ευρωπαϊκής Ένωσης ή της OeAD-GmbH. Ούτε η Ευρωπαϊκή Ένωση ούτε η χορηγούσα αρχή μπορούν να θεωρηθούν υπεύθυνες γι' αυτές.

1. Περιγραφή Μονάδας Ερευνητικής Διδακτικής Μονάδας

Τίτλος	Πράσινη Γεωμετρία 2 (Μαθηματικά στο παρτέρι)
Ηλικία μαθητών/τάξη	17-18 ετών
Διάρκεια ενότητας	1 x 50 λεπτά (έως 2 x 50 λεπτά)
Μαθηματικό θέμα	Εφαρμογές παραγωγίσισης και ολοκλήρωσης
Προαπαιτούμενες γνώσεις	<ul style="list-style-type: none">Καθορισμός της εξίσωσης μιας πολυωνυμικής συνάρτησης με δεδομένες τιμές συνάρτησηςΠαραγωγή πολυωνυμικών συναρτήσεωνΟλοκλήρωση πολυωνυμικών συναρτήσεωνΕρμηνεία του ολοκληρώματος ως η περιοχή κάτω από το γράφημα
Απαιτούμενα υλικά	<ul style="list-style-type: none">Φύλλο εργασίας 1
Στόχοι	<p>Ο μαθητής να:</p> <ul style="list-style-type: none">μπορεί να εφαρμόσει γνώσεις σχετικά με τις ιδιότητες των πολυωνυμικών συναρτήσεων σε πρακτικές, πραγματικές καταστάσειςμπορεί να χρησιμοποιήσει πολυωνυμικές συναρτήσεις για να μοντελοποιήσει αντικείμενα πραγματικής ζωήςμπορεί να εφαρμόσει παραγωγή και ολοκλήρωση σε πραγματικά περιβάλλοντα
Σημειώσεις σχετικά με την εργασία με μετανάστες μαθητές	<ul style="list-style-type: none">Οι μαθητές (ιδιαίτερα οι μετανάστες μαθητές) μπορούν να φέρουν φωτογραφίες από παρτέρια σε κήπους ή πάρκα από τις χώρες καταγωγής τους

Σχέδιο μαθήματος:**Μάθημα 1 (50 λεπτά)**

Ώρα	Μέθοδος	Περιεχόμενο και σχόλια
περίπου 5 λεπτά	Παρουσίαση και επικοινωνία Δάσκαλου -μαθητή	Ο/η εκπαιδευτικός προκαλεί τον ενδιαφέρον στους μαθητές για το θέμα του μαθήματος και εξηγεί τη σημασία του στην καθημερινή ζωή.
περίπου 35 λεπτά	Ομαδοσυνεργατική	Οι μαθητές επιλύουν τις εργασίες στο φύλλο εργασίας σε ομάδες των δύο ή τριών. Ο δάσκαλος πηγαίνει γύρω από την τάξη και βοηθά στα τυχόν προβλήματα που προκύπτουν.
περίπου 10 λεπτά	Επικοινωνία Δάσκαλου -μαθητή	Σύγκριση των αποτελεσμάτων

Εάν η τάξη είναι πολύ αφοσιωμένη και ενδιαφέρεται για τις εργασίες του μαθήματος 1, οι μαθητές μπορούν να εργαστούν σε μια πρόσθετη εργασία (Εργασία 4) είτε στο τέλος του μαθήματος 1 (εφόσον το επιτρέπει ο χρόνος), είτε σε ένα επόμενο μάθημα.

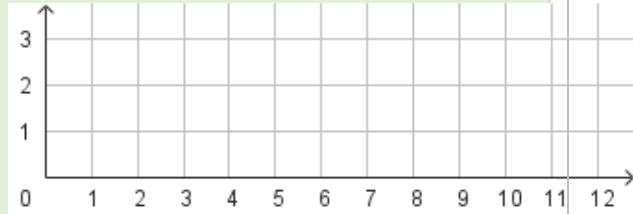
Το σχήμα του παρτεριού περιγράφεται από μια συνάρτηση f , όπου x είναι το πλάτος του παρτεριού σε μέτρα και $f(x)$ είναι το ύψος του παρτέρι σε μέτρα.

Η πολυωνυμική συνάρτηση δίνεται από: $f(x) =$

Εργασία 2:

Σχεδιάστε ξανά την πολυωνυμική συνάρτηση που περιγράφει το παρτέρι στο δεδομένο σύστημα συντεταγμένων.

Εκτιμήστε την πραγματική επιφάνεια του παρτεριού, χρησιμοποιώντας άνω και κάτω αθροίσματα (με 5 ίσα διαστήματα).



Εργασία 3:

Προσδιορίστε την πραγματική συνολική επιφάνεια του παρτεριού στον κήπο.

Φύλλο εργασίας 1 – λύσεις



Πρόκειται να δημιουργηθεί ένα παρτέρι σε έναν ορθογώνιο κήπο.

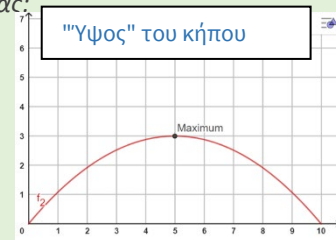
Το σχήμα του παρτεριού περιγράφεται από μια συνάρτηση f , όπου x είναι το πλάτος του παρτεριού σε μέτρα και $f(x)$ είναι το ύψος του παρτέρι σε μέτρα.

Εργασία 1:

Ένας κηπουρός τοποθετεί το παρτέρι ενός πελάτη με τέτοιο τρόπο ώστε το παρτέρι να ξεκινά από τις άκρες του κήπου και να φτάνει στο μέγιστο ύψος του στο κέντρο του κήπου. Ο πελάτης σημειώνει ότι το παρτέρι πρέπει να έχει μέγιστο «ύψος» τριών μέτρων. Επιπλέον, είναι γνωστό ότι η συνάρτηση ορίζεται μόνο για $0 \leq x \leq 10$.

- c) Κάντε ένα σκίτσο του κήπου με το παρτέρι και ονομάστε το.

Χώρος για το σκίτσο σας:



Πλάτος του κήπου

- d) Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω πληροφορίες, καθορίστε τον όρο αναπαράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f που περιγράφει το σχήμα του παρτεριού στον κήπο. Χρησιμοποιήστε τις ακόλουθες ιδιότητες για να το κάνετε αυτό.

	Περιγραφή με λέξεις	Μαθηματική περιγραφή
1)	Το παρτέρι ξεκινά από τις άκρες του κήπου. Αυτές οι άκρες βρίσκονται στο $x = 0$ και $x = 10$	Εγώ: $f(0) = 0$ II: $f(10) = 0$
2)	Το παρτέρι έχει το μέγιστο ύψος του στο κέντρο του κήπου. Το κέντρο του κήπου βρίσκεται στο $x = 5$	III: $f'(5) = 0$
3)	Ο πελάτης σημειώνει ότι το παρτέρι πρέπει να έχει μέγιστο «ύψος» τριών μέτρων.	IV: $f(5) = 3$

Πρώτον, εξετάστε το βαθμό της πολυωνυμικής συνάρτησης που είναι καλύτερος και ευκολότερος για αυτό το παρτέρι.

Πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού 2: Αυτό δίνεται γενικά από: $f(x) = ax^2 + bx + c$

Βρείτε την πολυωνυμική συνάρτηση που περιγράφει το παρτέρι. Γράψτε μια κατανοητή περιγραφή πώς επιτύχατε το αποτέλεσμα σας στον παρακάτω χώρο.

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{und} \quad f'(x) = 2ax + b$$

$$\text{Εγώ: } f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 0 \quad \rightarrow c = 0$$

$$\text{II: } f(10) = 0 \quad a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c = 0 \quad \rightarrow 100a + 10b = 0$$

$$\text{III: } f'(5) = 0 \quad 2 \cdot a \cdot 5 + b = 0 \quad \rightarrow 10a + b = 0$$

$$\text{IV: } f(5) = 3 \quad a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c = 3 \quad \rightarrow 25a + 5b = 3$$

Από τις εξισώσεις III και IV παίρνει κανείς το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων:

$$\text{III: } 10a + b = 0 \quad | \cdot (-5)$$

$$\text{IV: } 25a + 5b = 3$$

$$-25a = 3 \quad | : (-25) \rightarrow a = -\frac{3}{25}$$

$$\text{III: } -50a - 5b = 0$$

$$\text{IV: } 25a + 5b = 3$$

$$10a + b = 0 \quad | -b \rightarrow b = \frac{30}{25} = \frac{6}{5}$$

$$10a = -b$$

Εργασία 2:

Σχεδιάστε ξανά την πολυωνυμική συνάρτηση που περιγράφει Το παρτέρι στο δεδομένο σύστημα συντεταγμένων.

Εκτιμήστε την πραγματική επιφάνεια του παρτεριού, χρησιμοποιώντας άνω και κάτω αθροίσματα (με 5 ίσα διαστήματα).

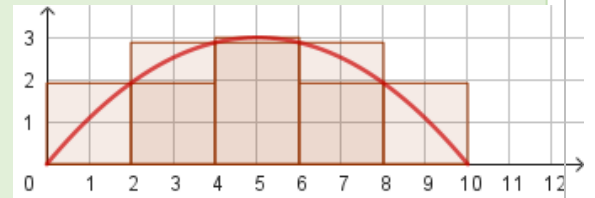
Για την εκτίμηση της περιοχής με τη βοήθεια άνω και κάτω αθροισμάτων, απαιτούνται ορισμένες τιμές συνάρτησης, οι τιμές των οποίων δίνονται στον ακόλουθο πίνακα τιμών (στρογγυλοποιημένες).

x	0	2	4	5	6	8	10
$f(x)$	0	1.92	2.88	3	2.88	1.92	0

Κάτω άθροισμα: $L_5 = 2 \cdot [f(0) + f(2) + f(4) + f(8) + f(10)]$
 $L_5 \approx 13.44$

Άνω άθροισμα: $U_5 = 2 \cdot [f(2) + f(4) + f(5) + f(6) + f(8)]$
 $U_5 \approx 25.2$

Κάποιος παίρνει: $13.44 \text{ m}^2 < \text{actual area} < 25.2 \text{ m}^2$



Εργασία 3:

Προσδιορίστε την πραγματική συνολική επιφάνεια του παρτεριού στον κήπο.

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{10} f(x) dx = \int_0^{10} \left(-\frac{3}{25}x^2 + \frac{6}{5}x \right) dx = \left(-\frac{3x^3}{25 \cdot 3} + \frac{6x^2}{5 \cdot 2} \right) \Big|_0^{10} \\ &= \left(-\frac{3 \cdot 10^3}{25 \cdot 3} + \frac{6 \cdot 10^2}{5 \cdot 2} \right) - \left(-\frac{3 \cdot 0^3}{25 \cdot 3} + \frac{6 \cdot 0^2}{5 \cdot 2} \right) = (-40 + 60) = 20 \end{aligned}$$

Η πραγματική συνολική επιφάνεια του παρτεριού είναι 20 m^2 .





★ Εργασία 4:



Προκειμένου να κάνει την καλύτερη δυνατή χρήση του χώρου του κήπου, ο πελάτης αναρωτιέται ποιο είναι το βέλτιστο πλάτος x που θα πρέπει το οικόπεδο να έχει ώστε να μεγιστοποιεί τη συνολική επιφάνεια των παρτεριών στον κήπο. Προσδιορίστε το βέλτιστο πλάτος και περιγράψτε πώς το κάνατε με κατανοητό τρόπο.

2. Ανάλυση συνέντευξης

Η εκπαιδευτικός που διδάσκει αυτή την ενότητα έχει 7ετή διδακτική εμπειρία. Το δεύτερο θέμα της είναι η Φυσική. Δεν έλαβε ιδιαίτερη εκπαίδευση σχετικά με τη διδασκαλία σε πολυπολιτισμικές τάξεις.

Η εκπαιδευτικός ανέφερε ότι αν και το πλαίσιο των εργασιών πιθανότατα δεν είναι αυτό που θα έκανε ένας πραγματικός κηπουρός, της άρεσε να δουλεύει μαζί τους. Οι μαθητές απόλαυσαν το γεγονός ότι υπήρχε ένα «ασυνήθιστο πλαίσιο», σε αντίθεση με απλά γραφήματα συναρτήσεων χωρίς καθόλου πλαίσιο ή τυποποιημένες εργασίες βελτιστοποίησης.

Η εκπαιδευτικός σχολίασε επίσης ότι αυτή η δραστηριότητα είναι μια καλή προετοιμασία για τις τελικές εξετάσεις των σχολείων δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, όπου οι εργασίες με την ολοκλήρωση και τον υπολογισμό του εμβαδού κάτω από τα γραφήματα είναι αρκετά συνηθισμένες. Ανέφερε ότι αρχικά δίσταζε να χρησιμοποιήσει ένα μη τυποποιημένο πλαίσιο για αυτή την προετοιμασία, αλλά είπε ότι οι πραγματικές μαθηματικές διαδικασίες που χρησιμοποιήθηκαν ήταν ίδιες με αυτές στις συνήθεις προετοιμασίες της, μόνο που το ένα πλαίσιο ήταν πιο ενδιαφέρον για τους μαθητές.

Για τους υπολογισμούς των άνω και κάτω αθροισμάτων στην εργασία 2, καθώς και για τον έλεγχο των αποτελεσμάτων των εργασιών 1 και 3, η εκπαιδευτικός χρησιμοποίησε το GeoGebra. Σχολίασε γενικά την έλλειψη χρήσης της τεχνολογίας στη διδακτική ενότητα και θα πρότεινε είτε να υπάρχουν κάποιες επιπλέον εργασίες όπου οι μαθητές πρέπει να χρησιμοποιούν την τεχνολογία, είτε να αλλάξουν τα συγκεκριμένα έργα με τέτοιο τρόπο ώστε οι μαθητές να μπορούν να εξασκήσουν τη χρήση της τεχνολογίας, επίσης, ενόψει της τελικής εξέτασης.

η εκπαιδευτικός πρόσθεσε επίσης ότι θα ήταν ωραίο να χρησιμοποιηθεί τελικά η αυλή του σχολείου ενώ εργαζόταν στην εργασία 1, για να κάνει ένα «πραγματικό σκίτσο» του κήπου.

3. Προτάσεις βελτίωσης

Η εκπαιδευτικός συνέστησε αρκετές βελτιώσεις στην ενότητα:

Πρώτον, πρότεινε να προστεθεί η χρήση της τεχνολογίας, ιδιαίτερα του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας, για τις εργασίες τους. Ειδικά η δραστηριότητα της εργασίας 2 (υπολογισμός κατώτερου και ανώτερου αθροίσματος) θεωρήθηκε ότι «δεν βοηθά πολύ στη βελτίωση των ικανοτήτων των μαθητών» αν γίνεται με το χέρι. Οι μαθητές έχουν κάνει τέτοιες δραστηριότητες στο παρελθόν και ξέρουν πώς να τις κάνουν, και σε μια «εφαρμοσμένη εργασία» οι υπολογισμοί που απαιτούνται με αυτό τον τρόπο θα τους επιβραδύνουν και θα μειώσουν έτσι τα κίνητρά τους.

Η δεύτερη πρότασή της θα ήταν να βγουν από την τάξη στην αυλή του σχολείου ή ακόμα και σε μια κοντινή παιδική χαρά, όπου οι μαθητές θα μπορούσαν π.χ. να χρησιμοποιήσουν μια περιοχή με γρασίδι ή ακόμα και ένα κουτί άμμου για να σχεδιάσουν ένα σκίτσο του «κήπου» τους σε φυσικό μέγεθος. Είπε ότι αυτό θα ήταν πολύ σημαντικό κίνητρο για τους μαθητές, δεδομένου ότι μπορούν να εφαρμόσουν ανώτερα μαθηματικά σε ένα εξωτερικό περιβάλλον, κάνοντάς τους να συνειδητοποιήσουν ότι τα μαθηματικά είναι κυριολεκτικά «γύρω μας».