Co-funded by the European Union

Math for Migrants

Case Study 02

Dati di base

Titolo della Research Teaching Unit	**Applicazioni di funzioni esponenziali**
Unità creata da	**BORG Deutsch-Wagram (AT)**
Basata sul Concept	**Modelli esponenziali nella vita reale**
Concept creato da	**Škola da Vinci (CZ)**
Data di insegnamento	**20.11.2023**
Numero di studenti in classe	**11**
Numero di studenti migranti	**1**

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or OeAD-GmbH. Neither the European Union nor the granting authority can be held responsible for them.

1. Descrizione dell'unità Research Teaching Unit

Titolo	**Applicazioni di funzioni esponenziali**
Età degli studenti/grado	16 anni
Durata dell'unità	1 x 50 minuti
Argomento matematico	Funzioni non lineari
Conoscenze prerequisite	• Proprietà di funzioni esponenziali • Interpretazione di grafici
Materiali necessari	• Foglio di lavoro "Applicazioni di funzioni esponenziali" (1 copia per studente) • Schede "Crescita e decadimento" (alcune copie, se possibile laminate) • Alla fine: calcolatrice
Obiettivi	• Applicare funzioni esponenziali in problemi reali • Consolidare la conoscenza delle funzioni esponenziali • Lavorare con modelli matematici di problemi reali
Note sul lavoro con I migranti	• • •

Lesson plan:

Prima dell'inizio della lezione, le copie degli schedari sono distribuite in alcuni punti della classe. Ogni punto dovrebbe avere un set completo di schedari. Questi punti servono come "stazioni di aiuto" dove gli studenti possano guardare le informazioni che li aiuteranno a risolvere i compiti del foglio di lavoro.

Tempo	Metodo	Contenuto e commenti
ca. 10 min	Esposizione e comunicazione studente/docente	Il docente motiva gli studenti all'argomento della lezione e descrive l'importanza delle percentuali nella vita quotidiana. Insieme agli studenti, ripete I concetti e le propietà principali delle funzioni esponenziali.
ca. 25 min	Lavoro a coppie	Gli studenti risolvono I compiti del foglio di lavoro a coppie. Il docente supporta le coppie se richiesto.
ca. 15 min	Comunicazione studente/docente	Confronto dei risultati

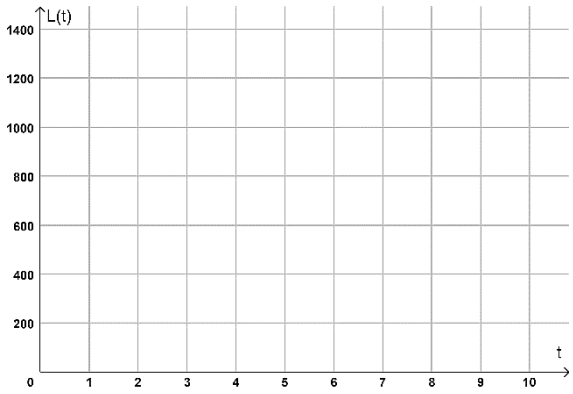
Applicazioni di funzioni esponenziali – foglio di lavoro

Le cavallette sono insetti che sono ampiamente distribuiti in molti paesi del mondo. Ci sono molte specie di cavallette, ma tutte hanno potenti zampe posteriori che permettono loro di saltare.

Le larve di cavallette si schiudono all'inizio della primavera, quando fa più caldo. Si nutrono di germogli di piante ed alberi. La popolazione delle cavallette aumenta esponenzialmente quando le condizioni sono ideali per loro.

Compito 1:
All'inizio della primavera, 100 cavallette della specie A si contano in un'area specifica.
Si presume che la popolazione crescerà del 45% ogni giorno per I prossimi giorni. Il tempo dall'inizio della primavera è dato come t in giorni ed il numero totale di cavallette come $L(t)$.

a) Create una rappresentazione grafica dello sviluppo della popolazione di locuste entro una settimana. Scrivete I valori calcolati di ciascun giorno.



b) Impostate un'equazione per la funzione $L(t)$ nella forma $L(t) = L_0 \cdot a^t$.

c) Calcolate quando la popolazione di locuste è aumentata 8 volte e controllate il vostro risultato con il grafico del Compito a). Segnate il valore calcolato nel Compito a).

Compito 2:
Nella stessa area specifica, si contano 20 locuste della specie B 2 gorni dopo l'inizio della primavera. 8 giorni dopo, il conto è ripetuto e si contano 47 locuste. Il tempo dall'inizio della primavera è dato come t in giorni ed il numero totale delle cavallette come $H(t)$.

a) Impostate un'equazione per $H(t)$ nella forma $H(t) = H_0 \cdot e^{\lambda \cdot t}$.

b) Determinate in che percentuale la polazione di locuste aumenta in un giorno

c) Determinate in che percentuale la polazione di locuste aumenta in un'ora

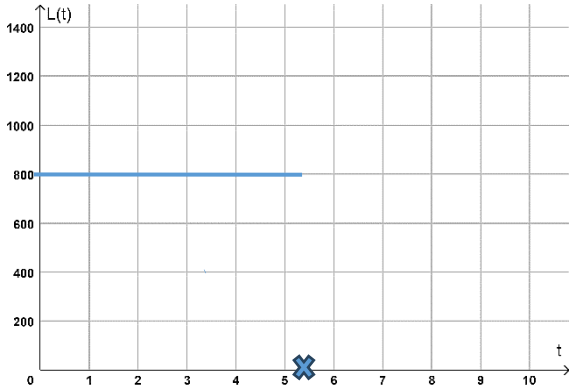
Applicazioni di funzioni esponenziali – foglio di lavoro con soluzioni

Le cavallette sono insetti che sono ampiamente distribuiti in molti paesi del mondo. Ci sono molte specie di cavallette, ma tutte hanno potenti zampe posteriori che permettono loro di saltare.

Le larve di cavallette si schiudono all'inizio della primavera, quando fa più caldo. Si nutrono di germogli di piante ed alberi. La popolazione delle cavallette aumenta esponenzialmente quando le condizioni sono ideali per loro.

Compito 1:
All'inizio della primavera, 100 cavallette della specie A si contano in un'area specifica.
Si presume che la popolazione crescerà del 45% ogni giorno per I prossimi giorni. Il tempo dall'inizio della primavera è dato come t in giorni ed il numero totale di cavallette come $L(t)$.

a) Create una rappresentazione grafica dello sviluppo della popolazione di locuste entro una settimana. Scrivete I valori calcolati di ciascun giorno.



b) Impostate un'equazione per la funzione $L(t)$ nella forma $L(t) = L_0 \cdot a^t$. $L(t) = 100 \cdot 1.45^t$

c) Calcolate quando la popolazione di locuste è aumentata 8 volte e controllate il vostro risultato con il grafico del Compito a). Segnate il valore calcolato nel Compito a).

$8 \cdot 100 = 100 \cdot 1{,}45^t$ V: 100
$8 = 1.45^t$ V log
$log(8) = t \cdot log(1.45)$ V: $log\ (1.45)$
$t = \frac{log(8)}{log(1.45)} \cong 5.60 days$

Compito 2:
Nella stessa area specifica, si contano 20 locuste della specie B 2 gorni dopo l'inizio della primavera. 8 giorni dopo, il conto è ripetuto e si contano 47 locuste. Il tempo dall'inizio della primavera è dato come t in giorni ed il numero totale delle cavallette come $H(t)$.

a) Impostate un'equazione per $H(t)$ nella forma $H(t) = H_0 \cdot e^{\lambda \cdot t}$.

b) Determinate in che percentuale la polazione di locuste aumenta in un giorno

c) Determinate in che percentuale la polazione di locuste aumenta in un'ora

2 giorni dopo l'inizio di primavera si ha: $H(2) = 20$. 8 giorni dopo si ha: $H(10) = 47$

$H(10) = H(2) \cdot a^8 \rightarrow 47 = 20 \cdot a^8 \rightarrow a = \sqrt[8]{\frac{47}{20}} \cong 1.1127$

$H(2) = H(0) \cdot a^2 \rightarrow H(0) = \frac{H(2)}{a^2} = \frac{20}{1.1127^2} \cong 16$ locuste

Equazione: $H(t) = 16 \cdot 1.1127^t$

$a = e^{\lambda} \rightarrow 1.1127 = e^{\lambda} \rightarrow \lambda = ln\ (1.1127) \cong 0.1068$

Equazione: $H(t) = 16 \cdot e^{0.1068 \cdot t}$ …. Soluzione del compito a)

Soluzione del compito b): la popolazione di locuste cresce del 11.27% al giorno

Soluzione del compito c): $1.1127^{\frac{1}{24}} \cong 1.0045$ La popolazione di locuste cresce del 0.45% all'ora.

Schede da tagliare e laminare:

Leggi di crescita e decadimento:

Le funzioni esponenziali possono avere una base positiva arbitraria. In scienze, il numero di Eulero e è usato frequentemente. A parte la rappresentazione generale $f(x) = c \cdot a^x$, spesso $f(x) = c \cdot e^{\lambda x}$ con $\lambda \in R$ viene usata.

	Crescita esponenziale	**Decrescita / decadimento esponenziale**
Base arbitraria a	$N(t) = N_0 \cdot a^t$ con $a > 1, t \geq 0$ a è chiamato fattore di crescita	$N(t) = N_0 \cdot a^t$ con $0 < a < 1, t \geq 0$ a è chiamato fattore di decrescita
Base e	$N(t) = N_0 \cdot e^{+\lambda t}$ con $\lambda > 0, t \geq 0$ λ è chiamato costante di crescita	$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$ con $\lambda > 0, t \geq 0$ λ è chiamato costante di decrescita

λ … „lambda“, lettera greca

Esempi:

	Crescita esponenziale	**Decrescita / decadimento esponenziale**
Base arbitraria a	$N(t) = 20 \cdot 1.23^t$	$N(t) = 20 \cdot 0.23^t$
Base e	$N(t) = 20 \cdot e^{0.4t}$	$N(t) = 20 \cdot e^{-0.4t}$

Osservazioni importanti:

Il **valore iniziale** è denotato da N_0, che significa: $N_0 = N(t = 0)$

Quanto un valore cambi per unità di tempo può essere dedotto solo dalla legge di crescita o decrescita, se è nella forma $f(x) = c \cdot a^x$ or $N(t) = N_0 \cdot a^t$.

Compito di dimostrazione 1:

Esprimi la legge di crescita $N(t) = 1500 \cdot 1.05^t$ usando la base e!

Le 2 formule della legge di crescita sono: $N(t) = N_0 \cdot a^t$ e $N(t) = N_0 \cdot e^{+\lambda t}$
Paragonando queste 2, si può vedere che $a = e^{\lambda}$. Ciò può essere riempito ora con I numeri del compito.

La legge di crescita (con base e) è ora:

$a = e^{\lambda}$ / Riempiendo $a = 1.05$
$1.05 = e^{\lambda}$ / ln
$ln(1.05) = \lambda \cdot \underbrace{ln(e)}_{1}$
$ln(1.05) = \lambda$ / Calcola ln (1.05)
$0.049 \approx \lambda$
$N(t) = 1500 \cdot e^{0.049 \cdot t}$

Compito di dimostrazione 2:

Una quantità cresce secondo la legge di crescita $N(t) = 490 \cdot e^{0.04879 \cdot t}$, dove t è misurato in anni. In che percentuale la quantità aumenta per anno?

Per scoprire in che percentuale la quantità aumenta per anno, si deve usare la formula $N(t) = N_0 \cdot a^t$. Solo lì si può desumere la percentuale. Le 2 formule della legge di crescita devono essere confrontate. Esse sono: $N(t) = N_0 \cdot a^t$ e $N(t) = N_0 \cdot e^{+\lambda t}$
Confrontando queste 2, si può vedere che $a = e^{\lambda}$. Ciò può essere rimepito ora con I numeri del compito.
La legge di crescita (con base a) è ora:

$a = e^{\lambda}$ / Riempiendo $e^{0.04879}$
$a = e^{0.04879}$ / Calcola $e^{0.04879}$
$a \approx 1.05$

$N(t) = 490 \cdot 1.05^t$

Da questa equazione si può desumere che la **quantità aumenta del 5 % per anno**.

Impostare una legge di crescita o decrescita, usando 2 valori conosciuti

Compito di dimostrazione:
La riserva di legname di una foresta è stata stimata in 150 000 metri cubi nel 2005. Cinque anni dopo, nel 2010, la stima era di Five years later, in 2010, 168 000 metri cubi. Si presume crescita esponenziale. Imposta una legge di crescita per la riserva di legname h con $h(t) = h_0 \cdot a^t$ come una funzione del numero di anni t che sono passati dal 2000.

Step 1: Calcolare il parametro a
Dal testo, sappiamo che $t = 0$ significa che l'anno 2000 ($h_0 = h(0)$).

Quindi, noi conosciamo 2 valori:
La riserva di legname nel 2005 è 150 000 m³ $\rightarrow h(5) = 150000$
La riserva di legname nel 2010 è 168 000 m³ $\rightarrow h(10) = 168000$
I due valori $h(5)$ e $h(10)$ e la proprietà
$f(x+h) = f(x) \cdot a^h$ sono usate per calcolare il parametro a.
Nota: per risolvere I compiti del foglio di lavoro, arrotonda il parametro a a 4 decimali, a meno che non sia stabilito diversamente!

$h(5) = 150000$
$h(10) = 168000$

$h(10) = h(5) \cdot a^5$
$168000 = 150000 \cdot a^5$
$a^5 = \frac{168000}{150000}$
$a = \sqrt[5]{\frac{168000}{150000}}$
$a \approx 1.0229$

Step 2: Calcolare il valore di h_0
Per calcolare h_0, usiamo di nuovo la proprietà
$f(x+h) = f(x) \cdot a^h$.
$h(0)$ può essere trovato riempiendo con I valori conosciuti.
Qui arrotondiamo ad interi, dato che il testo anche usa gli interi.
$h(0) \approx 133945$ da la riserva di legname nell'anno 2000.

$h(5) = h(0) \cdot a^5$
$150000 = h(0) \cdot 1.0229^5$
$\frac{150000}{1.0229^5} = h(0)$
$h(0) \approx 133945$

Step 3: Impostare la legge di crescita
Il compito ci chiede di usare la formula $h(t) = h_0 \cdot a^t$. Riempiendo con I valori di h_0 e a che abbiamo appena calcolato, la legge di crescita può essere impostata:

$h(t) = h_0 \cdot a^t$

Legge di crescita:
$h(t) = 133945 \cdot 1.0229^t$

Calcolare I valori di t all'esponente

Compito di dimostrazione:
Una coltura batterica cresce dell'80 % ogni ora. All'inizio, è di 800 batteri.
Calcola **quando** il numero di batteri è cresciuto **10 volte**!

Step 1: Impostare la legge di crescita
Dato che la coltura batterica cresce dell'80 %, si deve moltiplicare con il fattore 1.80 per ogni ora. Così, il parametro a è
$a = 1.80$ (Spiegazione: $100\% + 80\% = 180\% = \frac{180}{100} = 1.80$)
Dato che all'inizio ci sono 800 batteri, si ha: $N_0 = 800$

$N(t) = N_0 \cdot a^t$

Legge di crescita:
$N(t) = 800 \cdot 1.80^t$

Step 2: Calcolare il tempo t in cui il numero dei batteri è aumentato 10 volte t $\rightarrow$ stiamo cercando l'esponente $t \rightarrow$ dobbiamo usare il logaritmo
All'inizio, ci sono 800 batteri. Se questi aumentano 10 volte, ci sono $10 \cdot 800$ batteri $\rightarrow N(t) = 10 \cdot 800$
Per scoprire il tempo t, $10 \cdot 800$ deve essere riempito nella legge di crescita, e così t può essere calcolato-

Si può vedere che il tempo t è indipendente dal valore iniziale del numero dei batteri. Dipende solo dal fattore di crescita a!

$N(t) = 8000$ e
$N(t) = 800 \cdot 1{,}80^t$
$10 \cdot 800 = 800 \cdot 1{,}80^t \quad | : 800$
$10 = 1.80^t \quad | \log$
$log(10) = log(1{,}80^t)$
$log(10) = t \cdot log(1.80) \quad | : log(1.80)$
$t = \frac{log(10)}{log(1.80)}$
$t \approx 3.92h$

2. Analisi dell'intervista

La docente che ha impartito questa unità ha più di 30 anni di esperienza di insegnamento. La sua seconda materia è la Geografia. Non ha ricevuto nessuna formazione specifica per l'insegnamento in classi multiculturali.

La docente ha commentato particolarmente l'effetto motivazionale di questa unità sugli studenti. Li ha descritti come "per niente motivati" e ciò è stato visibile fin dai primi minuti della lezione, quando il comportamento degli studenti è stato discusso (apparentemente non per la prima volta). Mentre si introduceva l'argomento e si presentava il compito di dimostrazione, la motivazione non sembrava migliorare molto. Comunque, una volta che gli studenti hanno ricevuto i fogli di lavoro ed hanno iniziato a lavorare sui compiti reali, la motivazione è aumentata considerevolmente e gli studenti hanno lavorato in modo entusiastico. La docente ha commentato di essere sorpresa di ciò ed ha affermato che il contesto dell'unità e la realtà dei compiti ne erano le cause.

La docente ha detto che questa unità è stato un buon modo per rivedere le funzioni esponenziali e preparare meglio gli studenti agli esami finali (alla fine dell'anno scolastico). Ha aggiunto che gli studenti probabilmente non si sarebbero impegnati così tanto sull'argomento se lei avesse solo ripetuto le equazioni o usato il "contesto standard" del decadimento radioattivo.

3. Suggerimenti di miglioramento

La docente non ha menzionato particolari cambiamenti. Ha solo detto che forse i sottocompiti a) e b) potrebbereo essere scambiati l'uno con l'altro, dato che il calcolo di punti del grafico è probabilmente più facile se l'equazione di funzione è stata stabilita prima.