



Popis jednotky

Název	Křivky v hrnečku s kávou
Věk	17 let
Délka jednotky	2 x 45 minut
Matematický obsah	křivky, parametrická reprezentace
Předpokládané znalosti	<ul style="list-style-type: none">parametrická reprezentaceZákladní znalost prostředí GeoGebraFunkce a grafy
Pomůcky	<ul style="list-style-type: none">různé skleničky a hrnečky (přinesou žáci i učitel)voda, káva či čaj (zajistí učitel)baterka (zajistí učitel)IT vybavení s nainstalovaným programem GeoGebra a/nebo internetovým připojením
Očekávané výstupy	<p>Žák:</p> <ul style="list-style-type: none">rozumí obecnému pojmu parametrická reprezentace;popisuje jevy z reálného světa nástroji matematiky;modeluje jevy z reálného světa s pomocí IT.
Poznámky pro práci se žáky s OMJ	<ul style="list-style-type: none">Žáci do školy přinesou skleničky a hrnečky, které používají doma. Některé z nich mají vlastní příběh, který mohou sdílet se spolužáky. Ačkoli to není tématem této jednotky, lze diskutovat o různých tvarech nádob a vzorech a jejich vztahu k různým kulturám.

Plány hodin:

1. Hodina – úvod, experimentování, simulace



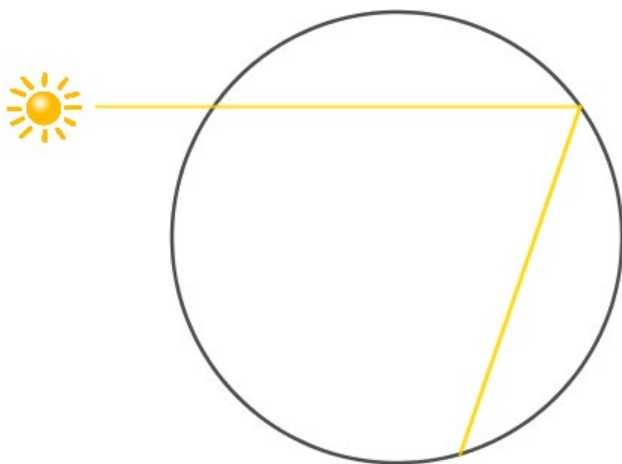
(Zdroj: Pointner, S. (2016). Kulinarische Mathematik.)

Tato jednotka vychází z návrhu Silvie Pointnerové (2016) a využívá zkušenost, kterou pravděpodobně mají všichni žáci ve třídě, nezávisle na jejich věku či kulturním původu, totiž že když na ne úplně plný šálek s nápojem svítí slunce, v určitých úhlech pohledu se na hladině vytvářejí „zvláštní obrazce“.

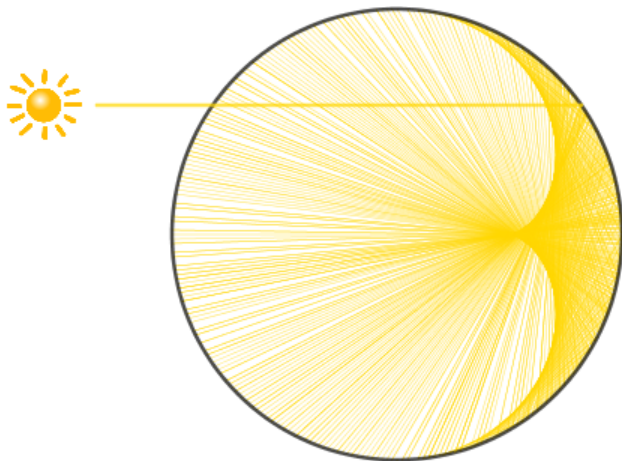
Žáci do hodiny přinesou z domova vlastní hrníčky.

Vyučovací jednotka začíná experimentováním s různými hrníčky, které si žáci (i učitel) přinesli do školy. Žáci se mohou s ostatními podělit o příběh daného hrnečku, pokud ho znají, nebo uvést, co z tohoto hrnečku obvykle pijí. Hrníčky se pak naplní vhodnou tekutinou a podrží buď ve slunečních paprscích nebo se použije baterka. Pak mohou žáci hádat, jaké „zvláštní obrazce“ se na hladině objevují. Žáci by měli dojít k závěru, že tyto obrazce (které jim budou představeny jako křivky) zatím neumí popsat prostředky, které se doposud naučili (nejsou to kružnice, elipsy, paraboly atd.). Tato část hodiny zabere přibližně 30 minut.

Zbývajících 15 minut hodiny vede učitel. Může použít GeoGebra (nebo podobný software pro dynamickou geometrii), aby předvedl, jak lze tyto obrazce modelovat. Aby to mohl udělat, začne tím, že nakreslí kružnici (nebo jiný geometrický útvar, který může představovat hrneček, např. elipsu) a paprsek, který se odráží na vnitřní straně kružnice.



Tento postup lze několikrát zopakovat s různými (rovnoběžnými) paprsky, nebo lze využít některý ze softwarů pro dynamickou geometrii a v tomto prostředí pohybovat vstupujícím paprskem (v módu Sledovat). Tím vznikne křivka podobná křivce níže:



2. hodina – Křivky v parametrické reprezentaci

Simulace z předchozí hodiny slouží tomu, abychom viděli, jak křivky vznikají, ale neposkytuje nám matematický popis křivky. Učitel v tuto chvíli zavede (nebo zopakuje) pojem křivky a parametrická reprezentace (žáci by již měli tento pojem znát z parametrické reprezentace přímky). Učitel může začít od definice křivky jako „obvykle nerovné čáry v rovině, kterou lze nakreslit, aniž bychom zvedli pero“. Některé křivky jsou grafy funkcí, jiné lze složit z několika grafů funkcí. Tento postup je ale velmi únavný, obzvláště v případě velmi složitých křivek. Alternativou k tomuto pomalému procesu je využít k popisu křivky její parametrickou reprezentaci.

Žáci už znají parametrickou reprezentaci přímky, která prochází bodem $P = (p_1, p_2)$ a má směrový vektor $\vec{v} = (v_1, v_2)$:

$$X(t) = P + t \cdot \vec{v} \text{ nebo } X(t) = (x(t), y(t)) = (p_1 + t \cdot v_1, p_2 + t \cdot v_2), \text{ kdy } t \in \mathbb{R}.$$

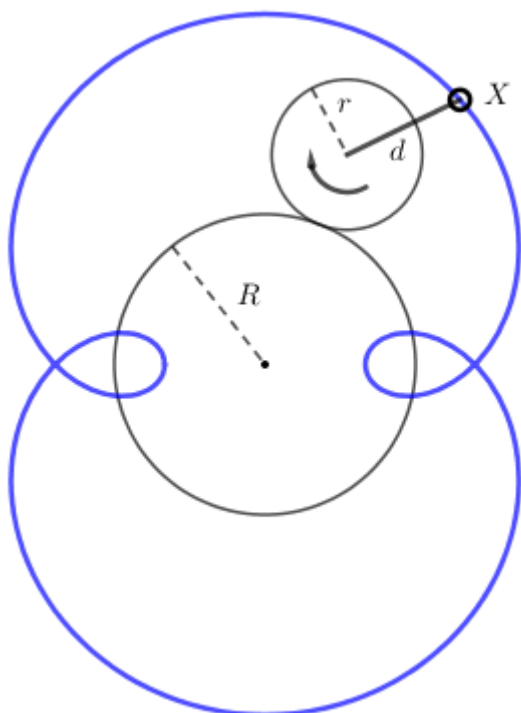
V tomto případě jsou $x: t \rightarrow x(t)$ a $y: t \rightarrow y(t)$ lineární funkce. Tento koncept však může být zobecněn pro popis složitějších obrazců tím, že x a y může být libovolnou (spojitou) funkcí. Pak dostaneme následující definici křivky:

Definice: Necht' $I = [a, b]$ je interval v $\mathbb{R}$, $x: t \rightarrow x(t)$ a $y: t \rightarrow y(t)$ jsou spojité funkce, potom množina set

$$c(t) = \{(x(t), y(t)) | t \in I\}$$

se nazývá *křivkou* v $\mathbb{R}^2$ (nebo *křivkou v rovině*). Rovnice $X(t) = (x(t), y(t))$ se nazývá *parametrická reprezentace křivky* c .

Případem specifické křivky je epitrochoida, která vzniká následujícím způsobem: bod X leží vně kružnice o poloměru r ve vzdálenosti d od jejího středu. Tato kružnice se odvaluje podél vnější strany další (pevně dané) kružnice o poloměru R . Průběhová křivka bodu X se pak nazývá *epitrochoida* (občas se pro tento obrazec používá také termín *epicykloida*).



Učitel může pro konstrukci epitrochoidy využít GeoGebru nebo některý z dostupných online zdrojů. Žáci si pak sami mohou vyzkoušet různé kombinace R a r a pozorovat, jak se epitrochoida proměňuje.

Parametrická reprezentace epitrochoidy vypadá takto:

$$X(t) = \left((R + r) \cdot \cos(t) - d \cdot \cos\left(\frac{R + r}{r} \cdot t\right), (R + r) \cdot \sin(t) - d \cdot \sin\left(\frac{R + r}{r} \cdot t\right) \right), \text{ kde } t \in \mathbb{R}.$$

Poznámka: Toto nelze odvodit snadno. Pravděpodobně by měl učitel tuto parametrickou reprezentaci uvést tak, jak je. Popis toho, jak byla reprezentace odvozena, může poskytnout nadaným žákům a/nebo zájemcům v tištěné podobě, nebo je odkázat na online materiál, kde proces odvození najdou.

Lze dokázat (i když ne příliš snadno), že křivka uvnitř kávového šálku je určitou formou epitrochoidy, kde R je polovina poloměru šálku, r je jedna čtvrtina poloměru šálku. Křivku, kterou jsme modelovali v 1. hodině, lze tedy nyní matematicky popsat jako

$$X(t) = \left(\frac{3}{4} \cdot r_{\text{cup}} \cdot \cos(t) - \frac{1}{4} \cdot r_{\text{cup}} \cdot \cos(3 \cdot t), \frac{3}{4} \cdot r_{\text{cup}} \cdot \sin(t) - \frac{1}{4} \cdot r_{\text{cup}} \cdot \sin(3 \cdot t) \right), \text{ kde } t \in \mathbb{R}$$

