Co-funded by the European Union

# Popis jednotky

| | |
|---|---|
| **Název** | **Demografický vývoj ve srovnání** |
| **Věk** | 16 let/ 1. ročník SŠ |
| **Délka jednotky** | 1 vyučovací hodina |
| **Matematický obsah** | Aplikace exponenciálních funkcí |
| **Předpokládané znalosti** | • Žáci umí narýsovat exponenciální funkce z dvojic hodnot.<br>• Žáci znají pojem zdvojnásobení času.<br>• Žáci umí vypočítat zdvojnásobení času a umí ho graficky přečíst. |
| **Pomůcky** | • List papíru nebo sešit na řešení úloh, pokud není dostatek místa přímo v pracovním listu<br>• Psací potřeby<br>• Kalkulačka |
| **Očekávané výstupy** | Žák<br>• rozpozná exponenciální vztah (s použitím vzorce a tabulky)<br>• rozpozná dané exponenciální koherence jako exponenciální funkce a dokáže přecházet z jednoho tvaru do druhého.<br>• rozumí pojmu zdvojnásobení času, spočítá odpovídající hodnoty a interpretuje je v kontextu.<br>• zná vlastností exponenciálních funkcí a interpretuje je v kontextu. |
| **Poznámky pro práci se žáky s OMJ** | • V této úloze se žáci s OMJ seznámí s počtem obyvatel Rakouska ve srovnání s africkou zemí.<br>• Žáci s OMJ se učí matematické vztahy založené na vývoji počtu obyvatel.<br>• Žáci s OMJ mohou využít údaje o počtu obyvatel k lepšímu odhadu velikosti Rakouska. |

This project was funded with support from the European Commission. The responsibility for the
This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made use of the information contained herein.

**Plán vyučovací jednotky:**

Potřeba jsou jedna až dvě vyučovací hodiny.
Na začátku hodiny žáci dostanou kopii pracovního listu a úlohy sami vyřeší. Poté řešení úlohy společně porovnají. Výsledky lze porovnat i na začátku druhé hodiny, pokud žáci potřebují více času.

Navržené úlohy jsou vhodným zakončením tématu „Exponenciální funkce a jejich využití“. Slouží jako příklad aplikace exponenciálního růstu v reálných situacích.

**Zdroje tabulek:**
https://www.statistik.at/statistiken/bevoelkerung-und-soziales/bevoelkerung/bevoelkerungsstand/bevoelkerung-zu-jahres-/-quartalsanfang [staženo: 15.10.2022]
https://www.laenderdaten.info/Afrika/Tschad/bevoelkerungswachstum.php [staženo: 15.10.2022]

# Demografický vývoj ve srovnání

Rakousko republika je vnitrozemský stát, což znamená, že nemá přístup k moři. Rakousko se nachází ve středu Evropy a má přibližně 9 milionů obyvatel.
Na následujícím obrázku jsou uvedeny údaje o počtu obyvatel Rakouska jako celku a v jednotlivých spolkových zemí v letech 2018-2022.

| Bundesland | 01.01.2018 | 01.01.2019 | 01.01.2020 | 01.01.2021 | 01.01.2022 | 01.07.2022 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Österreich | 8 822 267 | 8 858 775 | 8 901 064 | 8 932 664 | 8 978 929 | 9 061 848 |
| Burgenland | 292 675 | 293 433 | 294 436 | 296 010 | 297 583 | 300 457 |
| Kärnten | 560 898 | 560 939 | 561 293 | 562 089 | 564 513 | 567 644 |
| Niederösterreich | 1 670 668 | 1 677 542 | 1 684 287 | 1 690 879 | 1 698 796 | 1 713 465 |
| Oberösterreich | 1 473 576 | 1 482 095 | 1 490 279 | 1 495 608 | 1 505 140 | 1 517 477 |
| Salzburg | 552 579 | 555 221 | 558 410 | 560 710 | 562 606 | 566 751 |
| Steiermark | 1 240 214 | 1 243 052 | 1 246 395 | 1 247 077 | 1 252 922 | 1 260 417 |
| Tirol | 751 140 | 754 705 | 757 634 | 760 105 | 764 102 | 768 443 |
| Vorarlberg | 391 741 | 394 297 | 397 139 | 399 237 | 401 674 | 404 415 |
| Wien | 1 888 776 | 1 897 491 | 1 911 191 | 1 920 949 | 1 931 593 | 1 962 779 |

Q: STATISTIK AUSTRIA, Statistik des Bevölkerungsstandes. Erstellt am 09.08.2022. – Vorläufige Ergebnisse für den Stichtag 01.07.2022.

**Úloha 1:**

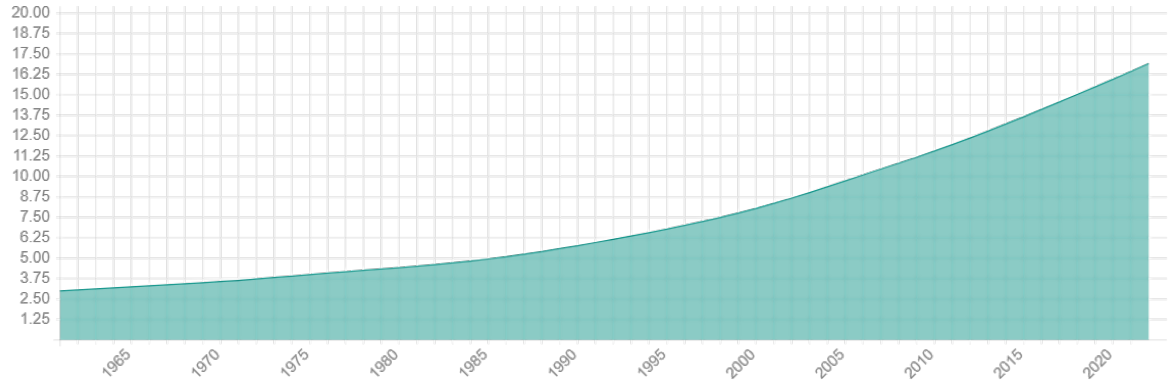
**a)** Pro popis vývoje počtu obyvatel v Rakousku vytvořte vzorec růstu ve tvaru $N(t) = N_0 \cdot a^t$ ($t$ v rocích). Jako počáteční rok pro výpočty vezměte rok 2018.

**b)** Určete přibližný roční přírůstek v procentech a uveďte, o kolik procent se zvýší počet obyvatel za deset let.

**c)** Vypočítejte, za kolik let se populace zdvojnásobí a ve kterém roce tedy ke zdvojnásobení populace dojde.

**d)** Určete, jaký je předpokládaný počet obyvatel Rakouska k 01.07.2023.

Vedle Evropy se nachází africký kontinent. V Africe dnes žije přibližně 1,3 miliardy lidí. Čadská republika je stejně jako Rakousko vnitrozemskou zemí, leží ve středu Afriky.
Na sever země je poušť Sahara, a proto je velmi řídce osídlen.
Následující obrázek ukazuje vývoj počtu obyvatel Čadu.
Na ose *x* jsou vyznačeny roky 1961-2022 a na ose *y* počet obyvatel (zaokrouhleně) v milionech.



**Úloha 2:**

a) Použijte graf výše k tomu, abyste určili, za jak slouho se počet obyvatel Čadu zdvojnásobí. Tuto hodnotu porovnejte s tím, za jak dlouho se počet obyvatel zdvojnásobí v Rakousku. Čas, kdy se počet obyvatel zdvojnásobí, označte na ose *x.*

**KLÍČ** **Demografický vývoj ve srovnání**

**Úloha 1:**

**a)** Pro popis vývoje počtu obyvatel v Rakousku vytvořte vzorec růstu ve tvaru $N(t) = N_0 \cdot a^t$ ($t$ v rocích). Jako počáteční rok pro výpočty vezměte rok 2018.

Platí: $N(0) = N_0 = 8\,822\,267$

Určení parametru $a$:

$N(2019) = N(2018) \cdot a$ | $N(2020) = N(2019) \cdot a$ | $N(2021) = N(2020) \cdot a$ | $N(2022) = N(2021) \cdot a$

$\frac{N(2019)}{N(2018)} = a$ | $\frac{N(2020)}{N(2019)} = a$ | $\frac{N(2021)}{N(2020)} = a$ | $\frac{N(2022)}{N(2021)} = a$

$\frac{8\,858\,775}{8\,822\,267} = a$ | $\frac{8\,901\,064}{8\,858\,775} = a$ | $\frac{8\,932\,664}{8\,901\,064} = a$ | $\frac{8\,978\,929}{8\,932\,664} = a$

$1{,}004138 = a$ | $1{,}004774 = a$ | $1{,}003550 = a$ | $1{,}005179 = a$

$\bar{a} = \frac{1{,}004138+1{,}004774+1{,}003550+1{,}005179}{4} = 1{,}00441025$

Proto pro růst počtu obyvatel platí: $\boldsymbol{N(t) = 8\,822\,257 \cdot 1{,}00441025^t}$

**b)** Určete přibližný roční přírůstek v procentech a uveďte, o kolik procent se zvýší počet obyvatel za deset let.

Z výše uvedeného vzorce pro růst počtu obyvatel vyplývá, že počet obyvatel Rakouska roste o 0,441025% za rok.

$1{,}00441025^{10} = 1{,}044988137$

Z toho plyne, že za deset let se počet obyvatel zvýší zhruba o 4.5 %.

**c)** Vypočítejte, za kolik let se populace zdvojnásobí a ve kterém roce tedy ke zdvojnásobení populace dojde.

$$2 \cdot N(0) = N(0) \cdot 1{,}00441025^t$$

$$2 = 1{,}00441025^t$$

$$log(2) = t \cdot log(1{,}00441025)$$

$$t = \frac{log(2)}{log(1{,}00441025)}$$

$$\boldsymbol{t \sim 157{,}5 \text{ let}}$$

**d)** Určete, jaký je předpokládaný počet obyvatel Rakouska k 01. 07.2023.

$N(2023) = 8\,822\,257 \cdot 1{,}00441025^5 =$ **9 018 522 obyvatel**

**Úloha 2:**

**a)** Použijte graf výše k tomu, abyste určili, za jak slouho se počet obyvatel Čadu zdvojnásobí. Tuto hodnotu porovnejte s tím, za jak dlouho se počet obyvatel zdvojnásobí v Rakousku. Čas, kdy se počet obyvatel zdvojnásobí, označte na ose *x*.

Počet obyvatel Čadu se zdvojnásobí zhruba za 29 let. To znamená, že doba, za kterou se počet obyvatel Čadu zdvojnásobí, je významně kratší než doba, za kterou se zdvojnásobí počet obyvatel Rakouska (přibližně 157 let).