



Popis jednotky

Název	Trdelník
Věk	17-18 let/ 3. ročník SŠ
Délka jednotky	1 vyučovací hodina
Matematický obsah	Integrální počet (využití integrálního počtu – výpočet objemu)
Předpokládané znalosti	<ul style="list-style-type: none">• Žáci znají pravidla integrování.• Žáci znají a umějí používat základní větu integrálního počtu.• Žáci chápou objem jakou součet nekonečně mnoha částí povrchu.
Pomůcky	<ul style="list-style-type: none">• Papír nebo sešit pro řešení úloh, pokud není dostatek místa přímo v pracovním listu• Psací potřeby• kalkulačka• GeoGebra
Očekávané výstupy	<p>Žák:</p> <ul style="list-style-type: none">• modeluje každodenní situace s pomocí matematických funkcí a vypočítá výsledek.• počítá objem s pomocí integrálního počtu.• sestaví lineární funkci z daných dvojic hodnot.• interpretuje integrály v daném kontextu.
Poznámky pro práci se žáky s OMJ	<ul style="list-style-type: none">• Žáci s OMJ se dozvídají víc o české kultuře.• Žáci s OMJ se učí matematiku v kontextu příjemných každodenních situací.

Plán vyučovací jednotky:

Potřeba jsou jedna až dvě vyučovací hodiny.

Na začátku hodiny žáci dostanou kopii pracovního listu a úlohy sami vyřeší. Poté řešení úlohy společně porovnají. Výsledky lze porovnat i na začátku druhé hodiny, pokud žáci potřebují více času.

Výpočet objemu je součástí aplikačních úloh s integrálním počtem. Proto se tímto typem úloh zabýváme až poté, co byly probrány úlohy na pohyb a výpočet obsahu. Základem této jednotky je poznatek, že objem může být složen z nekonečného počtu malých plošek. Proto je pro řešení těchto úloh nezbytné znát základní větu integrálního počtu.

Zdroj obrázku u textu:

Vlastní obrázek, ©Pamina Gaida

Trdelník

Při procházce centrem Prahy nepochybně narazíte na trdelník. Trdelník původně pochází ze Slovenska, kde se s ním setkáváme od 18. století. Jedná se o teplou laskominu pečenou nad otevřeným ohněm. Povrch je pokrytý karamelizovaným cukrem a skořicí. V Česku je trdelník populární až v posledních několika letech a mylně se považuje za českou specialitu.

Typický trdelník má dole vnitřní průměr 3,5 cm a nahoře vnitřní průměr 5,5 cm. Vysoký je zhruba 10 cm. Vnitřní průměr se zvětšuje lineárně.

Na obrázku je trdelník naplněný jahodami.



Úloha 1:

V libovolné výšce h má vodorovný řez trdelníku tvar kruhu. Vytvořte náčrt trdelníku a označte jej všemi známými hodnotami.

Úloha 2:

Uveďte vzorec pro poloměr $r(h)$ kruhového příčného řezu ve výšce h .

Úloha 3:

Trdelník je naplněn jahodovým krémem.

Vysvětlete, co v tomto kontextu znamená výraz $\pi \cdot \int_0^5 (r(h))^2 dh$.

Úloha 4:

Celý trdelník je odshora až dolů naplněn jahodovým krémem.

Vypočítejte, kolik ml jahodového krému je v dezertu.

Úloha 5:

Přemýšlejte, zda ve vaší vlastní zemi existuje nějaký typický pokrm, jehož objem lze určit pomocí integrálního počtu nebo jednoduššího vzorce pro výpočet objemu.

KLÍČ

Trdelník

Při procházce centrem Prahy nepochybně narazíte na trdelník. Trdelník původně pochází ze Slovenska, kde se s ním setkáváme od 18. století. Jedná se o teplou laskominu pečenou nad otevřeným ohněm. Povrch je pokrytý karamelizovaným cukrem a skořicí. V Česku je trdelník populární až v posledních několika letech a mylně se považuje za českou specialitu.

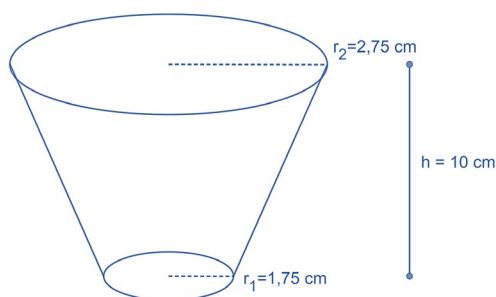
Typický trdelník má dole vnitřní průměr 3,5 cm a nahoře vnitřní průměr 5,5 cm. Vysoký je zhruba 10 cm. Vnitřní průměr se zvětšuje lineárně.

Na obrázku je trdelník naplněný jahodami.



Úloha 1:

V libovolné výšce h má vodorovný řez trdelníku tvar kruhu. Vytvořte náčrt trdelníku a označte jej všemi známými hodnotami.



Úloha 2:

Uveďte vzorec pro poloměr $r(h)$ kruhového příčného řezu ve výšce h .

Průměr dole je 3,5 cm → Poloměr je tedy 1,75 cm

Průměr nahoře je 5,5 cm → Poloměr tedy 2,75 cm

Vzhledem k tomu, že každé výšce náleží konkrétní poloměr, můžeme pojmenovat dva body lineární funkce:

$P_1 = (0; 1,75)$ a $P_2 = (10; 2,75)$

Lineární funkce poloměru v závislosti na výšce: $r(h) = k \cdot h + d$

Určení sklonu k : $k = \frac{2,75 - 1,75}{10 - 0} = \frac{1}{10} = 0,10$ und $d = r(0) = 1,75$

→ $r(h) = 0,1 \cdot h + 1,75$

Úloha 3:

Trdelník je naplněn jahodovým krémem.

Vysvětlete, co v tomto kontextu znamená výraz $\pi \cdot \int_0^5 (r(h))^2 dh$.

Výraz $\pi \cdot \int_0^5 (r(h))^2 dh$ udává množství šlehačkové náplně v cm^3 ve chvíli, kde je trdelník naplněn do výšky 5 cm.

Úloha 4:

Celý trdelník je odshora až dolů naplněn jahodovým krémem.

Vypočítejte, kolik ml jahodového krému je v dezertu.

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{10} \pi \cdot (r(h))^2 dh \\ &= \int_0^{10} \pi \cdot (0,1 \cdot h + 1,75)^2 dh \\ &= \pi \cdot \int_0^{10} (0,01 h^2 - 0,35 h + 3,0625) dh \\ &= \pi \cdot \left(\frac{0,01 h^3}{3} - \frac{0,35 h^2}{2} + 3,0625 h \right) \Big|_0^{10} \\ &= \left[\pi \cdot \left(\frac{0,01 \cdot 10^3}{3} - \frac{0,35 \cdot 10^2}{2} + 3,0625 \cdot 10 \right) - \underbrace{\pi \cdot \left(\frac{0,01 \cdot 0^3}{3} - \frac{0,35 \cdot 0^2}{2} + 3,0625 \cdot 0 \right)}_{=0} \right] \\ &= \pi \cdot (3,3 - 17,5 + 30,625) \\ &\sim 51,71 \text{ cm}^3 = \mathbf{51,71 \text{ ml}} \end{aligned}$$

Úloha 5:

Přemýšlejte, zda ve vaší vlastní zemi existuje nějaký typický pokrm, jehož objem lze určit pomocí integrálního počtu nebo jednoduššího vzorce pro výpočet objemu.

_____ vlastní odpovědi _____
