



Popis vyučovací jednotky

Název	Zelená geometrie 2 (Matematika v květinovém záhonku)
Věk studentů	17-18 let
Délka	1 x 50 minut (až 2 x 50 minut)
Matematické téma	Aplikace derivací a integrálů
Potřebné znalosti	<ul style="list-style-type: none">• Vytvoření rovnice polynomicke= funkce pomocí daných funkčních hodnot• Derivace polynomických funkcí• Integrace polynomických funkcí• Využití integrálu pro výpočet plochy pod grafem
Materiály	<ul style="list-style-type: none">• List s úlohami 1
Cíle	<p>Student</p> <ul style="list-style-type: none">• Umí aplikovat znalosti o polynomických funkcích v praktických situacích z reálného života• Umí používat polynomicke funkce pro modelování objektů z reálného života• Umí aplikovat derivace a integrály v reálném kontextu
Poznámky k práci s migranty	<ul style="list-style-type: none">• Studenti (zejména migranti) mohou přinést obrázky květinových záhonů v zahradách nebo parcích v zemích, ze kterých pocházejí.

Plán hodiny:**1. hodina (50 minut)**

Čas	Metoda	Obsah a komentáře
cca 5 min	Výklad a komunikace mezi studenty a učitelem	Učitel motivuje žáky k tématu hodiny a vysvětlí jejich význam v každodenním životě.
cca 35 min	Práce ve dvojicích nebo malých skupinkách	Studenti řeší úkoly na pracovním listu ve dvou nebo tříčlenných týmech. Učitel obchází třídu a pomáhá s případnými problémy.
cca 10 min	Komunikace učitele a studentů	Porovnání výsledků

Pokud má třída zájem o úlohy z 1. hodiny, mohou žáci pracovat na další úloze (úloha 4) buď na konci 1. hodiny (pokud to čas dovolí), nebo v další hodině.

Tvar květinového záhonu je popsán funkcí f , kde x je délka záhonu v metrech, a $f(x)$ je šířka květinového záhonu v metrech.

Zahradník navrhne záhon zákazníka tak, aby záhon začínal na okrajích zahrady a dosahoval maximální výšky ve středu zahrady. Zákazník si přeje, aby záhon měl maximální „výšku“ tři metry. Dále víme, že funkce f je definována pouze pro $0 \leq x \leq 10$.

- Prostor pro náčrtek:

- | Slovní popis | Matematický popis |
|--|---|
| Záhonek začíná v rozích zahrady. Tyto body mají souřadnice $x = \underline{\hspace{2cm}}$ a $x = \underline{\hspace{2cm}}$. | I: <u> </u>
II: <u> </u> |
| Záhonek má maximální šířku uprostřed zahrady. Střed zahrady nastává pro $x = \underline{\hspace{2cm}}$. | III: <u> </u> |
| Zákazník si přeje, aby maximální šířka záhonu byla 3 metry | IV: <u> </u> |

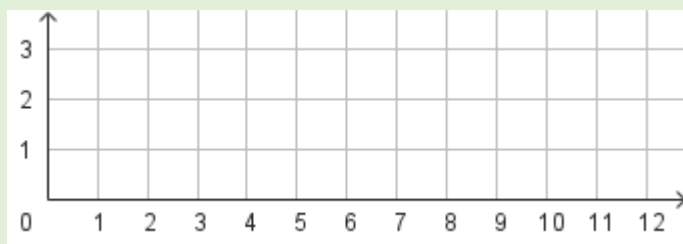
Polynomická funkce stupně _____ : Obecný předpis: $f(x) =$ _____

Výsledná polynomická funkce: $f(x) =$

Úloha 2:

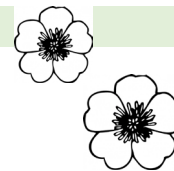
Načrtněte graf polynomicke funkce, která popisuje květinový záhon v dané soustavě souřadnic.

Odhadněte skutečnou plochu záhonu s využitím horních a dolních součtů (s 5 intervaly se stejnou délkou).



Úloha 3:

Vypočítejte skutečnou celkovou plochu květinového záhonu v zahradě.



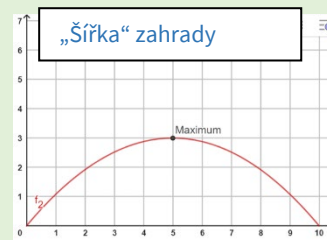
V obdélníkové zahradě je třeba vytvořit květinový záhon.

Tvar květinového záhonu je popsán funkcí f , kde x je délka záhonu v metrech, a $f(x)$ je šířka záhonu v metrech.

Úloha 1:

Zahradník navrhne záhon zákazníka tak, aby záhon začínal na okrajích zahrady a dosahoval maximální výšky ve středu zahrady. Zákazník si přeje, aby záhon měl maximální „výšku“ tři metry. Dále víme, že funkce f je definována pouze pro $0 \leq x \leq 10$.

Prostor pro náčrtek:



- a) Načrtněte zahradu se záhonem a popište ji.

- b) S využitím těchto informací určete tvar polynommické funkce f , která popisuje tvar záhonu. Využijte následující vlastnosti.

	Slovní popis	Matematický popis
1)	Záhonek začíná v rozích zahrady. Tyto body mají souřadnice $x = 0$ and $x = 10$.	I: $f(0) = 0$ II: $f(10) = 0$
2)	Záhonek má maximální šířku uprostřed zahrady. Střed zahrady nastává pro $x = 5$.	III: $f'(5) = 0$
3)	Zákazník si přeje, aby maximální šířka záhonu byla 3 metry	IV: $f(5) = 3$

Nejprve uvažujte o stupni polynommické funkce, který je pro tento návrh záhonu nejlepší a nejjednodušší.

Polynommická funkce stupně 2: Obecný předpis: $f(x) = ax^2 + bx + c$

Najděte polynommickou funkci, která popisuje záhon. Do níže uvedeného prostoru srozumitelně popište, jak jste k výsledku dospěli.

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{a} \quad f'(x) = 2ax + b$$

$$\begin{aligned} \text{I: } f(0) &= 0 & a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c &= 0 & \rightarrow c &= 0 \\ \text{II: } f(10) &= 0 & a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c &= 0 & \rightarrow 100a + 10b &= 0 \\ \text{III: } f'(5) &= 0 & 2 \cdot a \cdot 5 + b &= 0 & \rightarrow 10a + b &= 0 \\ \text{IV: } f(5) &= 3 & a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c &= 3 & \rightarrow 25a + 5b &= 3 \end{aligned}$$

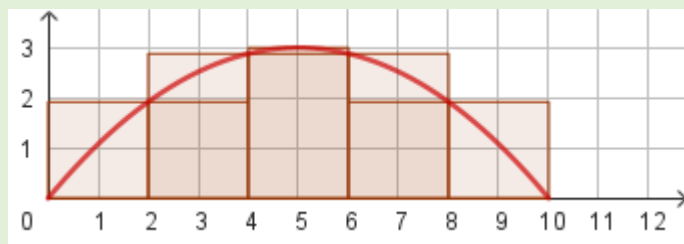
Z rovnic III a IV získáme následující soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} \text{III: } 10a + b &= 0 & | \cdot (-5) & & -25a &= 3 & | : (-25) & \rightarrow a &= -\frac{3}{25} \\ \text{IV: } 25a + 5b &= 3 & & & & & & & \\ \text{III: } -50a - 5b &= 0 & & & 10a + b &= 0 & | -b & \rightarrow b &= \frac{30}{25} = \frac{6}{5} \\ \text{IV: } 25a + 5b &= 3 & & & 10a &= -b & & & \end{aligned}$$

Úloha 2:

Načrtněte graf polynomicke funkce, která popisuje květinový záhon v dané soustavě souřadnic.

Odhadněte skutečnou plochu záhonu s využitím horních a dolních součtů (s 5 intervaly se stejnou délkou).



K odhadu plochy pomocí horních a dolních součtů jsou zapotřebí některé funkční hodnoty, jejichž hodnoty jsou uvedeny v následující tabulce hodnot (zaokrouhlené).

x	0	2	4	5	6	8	10
$f(x)$	0	1.92	2.88	3	2.88	1.92	0

$$\text{Dolní součet: } L_5 = 2 \cdot [f(0) + f(2) + f(4) + f(8) + f(10)] \\ L_5 \approx 13.44$$

$$\text{Horní součet: } U_5 = 2 \cdot [f(2) + f(4) + f(5) + f(6) + f(8)] \\ U_5 \approx 25.2$$

Úloha 3:

Vypočítejte skutečnou celkovou plochu květinového záhonu v zahradě.

$$A = \int_0^{10} f(x) dx = \int_0^{10} \left(-\frac{3}{25}x^2 + \frac{6}{5}x \right) dx = \left(-\frac{3x^3}{25 \cdot 3} + \frac{6x^2}{5 \cdot 2} \right) \Big|_0^{10} \\ = \left(-\frac{3 \cdot 10^3}{25 \cdot 3} + \frac{6 \cdot 10^2}{5 \cdot 2} \right) - \left(-\frac{3 \cdot 0^3}{25 \cdot 3} + \frac{6 \cdot 0^2}{5 \cdot 2} \right) = (-40 + 60) = 20$$

The actual total area of the flower bed is 20m².



**★ Úloha 4:**

Aby zákazník co nejlépe využil zahradní plochu, položí si otázku, jakou optimální šířku x by pozemek by měl mít, aby se maximalizovala celková plocha záhonů na zahradě. Určete optimální šířku a srozumitelně popište, jak jste to udělali.