



Unterrichtseinheiten

Mathematisches Thema	<i>Anwendung von Exponentialfunktionen</i>
Alter der SchülerInnen/ Schulstufe	16 Jahre (Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe II)
Länge der Einheit	1 x 50 Minuten

Benötigte Materialien:

- Arbeitsblatt „Anwendung von Exponentialfunktionen“ (siehe Anhang) für jede Schülerin und jeden Schüler; Einordnung des Arbeitsblattes in die Schulübungs-Mappe
- Karteikärtchen mehrmals ausdrucken, folieren, ausschneiden und an verschiedenen Plätzen im Klassenzimmer verteilen. An jedem Ort sollen aber alle Karteikärtchen liegen.

Zeit	Sozialform	Inhalt und Anmerkung
ca. 10 min	Frontalunterricht und Lehrer-Schüler-Gespräch	Die Lehrperson motiviert die Schülerinnen und Schüler für das Thema der Stunde. Wiederholung der wichtigsten mathematischen Begriffe.
ca. 25 min	Partnerarbeit	Die Schülerinnen und Schüler lösen die Aufgabenstellungen des Arbeitsblattes in Zweiertteams. Die Lehrperson geht durch die Klasse und hilft bei auftretenden Problemen.
ca. 15 min	Lehrer-Schüler-Gespräch	Vergleichen der Ergebnisse der Aufgaben

Bemerkung:

- Die Aufgabenstellung soll am Ende des Kapitels „Anwendung von Exponentialfunktionen“ erledigt werden. Sie dient der Festigung des Wissens der Schülerinnen und Schüler.

Quelle des Bildes der Heuschrecke:

https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcSxD2T_bAI223TbQCYKQdglBepF3E4Tq_AxFwOmHTorliPRSX7xnLIqO2PUCN8K9C3Cfs&usqp=CAU

Anwendung von Exponentialfunktionen

Heuschrecken sind Insekten, die auf der ganzen Erde verbreitet sind. Es gibt eine Vielzahl an verschiedenen Arten von Heuschrecken, die aber alle kräftige Hinterbeine zum Springen haben.

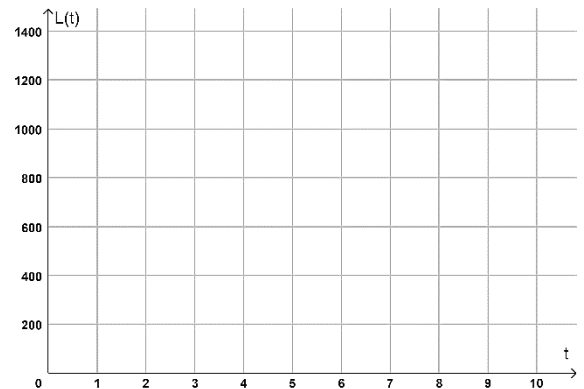


Die Larven der Heuschrecken schlüpfen zu Frühlingsbeginn, wenn es wärmer wird. Sie ernähren sich von den jungen Trieben der Pflanzen und Bäume. Die Population der Heuschrecken nimmt bei für sie idealen Bedingungen exponentiell zu.

Aufgabenstellung 1:

In einem abgegrenzten Bereich werden zu Beginn des Frühlings 100 Heuschrecken der Gattung A gezählt. Es wird davon ausgegangen, dass in den nächsten Tagen die Population um 45% pro Tag wächst. Die Zeit seit Beginn des Frühlings wird mit t in Tagen und der Gesamtzahl der Heuschrecken mit $L(t)$ angegeben.

- a) Stelle die Entwicklung Heuschreckenpopulation in einer Woche graphisch dar. Notiere die berechneten Werte jedes einzelnen Tages.



- b) Stelle die Funktionsgleichung $L(t)$ in der Form $L(t) = L_0 \cdot a^t$ auf. _____
- c) Berechne, wann sich die Heuschreckenpopulation verachtfaacht hat und kontrolliere dein Ergebnis mit der graphischen Darstellung aus der Aufgabenstellung a). Markiere den berechneten Wert in der Aufgabenstellung a).

Aufgabenstellung 2:

Im selben abgegrenzten Bereich zählt man zwei Tage nach Beginn des Frühlings 20 Heuschrecken der Gattung B. Acht Tage später wird die Zählung wiederholt und es werden 47 Heuschrecken gezählt. Die Zeit seit Beginn des Frühlings wird mit t in Tagen und der Gesamtzahl der Heuschrecken mit $H(t)$ angegeben.

- a) Stelle die Funktionsgleichung $H(t)$ in der Form $H(t) = H_0 \cdot e^{\lambda \cdot t}$ auf.
- b) Ermittle, um wieviel Prozent die Heuschreckenpopulation in einem Tag zunimmt.
- c) Ermittle, um wieviel Prozent die Heuschreckenpopulation in einer Stunde zunimmt.

Anwendung von Exponentialfunktionen

Heuschrecken sind Insekten, die auf der ganzen Erde verbreitet sind. Es gibt eine Vielzahl an verschiedenen Arten von Heuschrecken, die aber alle kräftige Hinterbeine zum Springen haben.

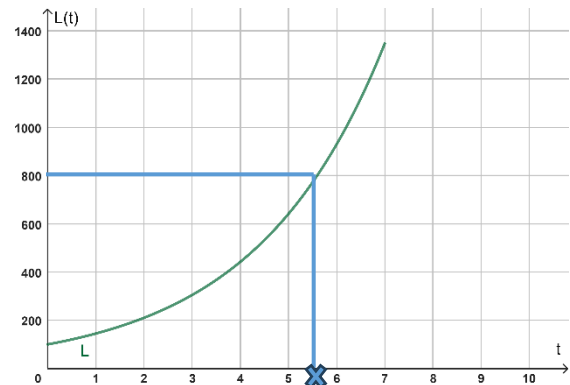


Die Larven der Heuschrecken schlüpfen zu Frühlingsbeginn, wenn es wärmer wird. Sie ernähren sich von den jungen Trieben der Pflanzen und Bäume. Die Population der Heuschrecken nimmt bei für sie idealen Bedingungen exponentiell zu.

Aufgabenstellung 1:

In einem abgegrenzten Bereich werden zu Beginn des Frühlings 100 Heuschrecken der Gattung A gezählt. Es wird davon ausgegangen, dass in den nächsten Tagen die Population um 45% pro Tag wächst. Die Zeit seit Beginn des Frühlings wird mit t in Tagen und der Gesamtzahl der Heuschrecken mit $L(t)$ angegeben.

- a) Stelle die Entwicklung Heuschreckenpopulation in einer Woche graphisch dar. Notiere die berechneten Werte jedes einzelnen Tages.



- b) Stelle die Funktionsgleichung $L(t)$ in der Form $L(t) = L_0 \cdot a^t$ auf. $\underline{\underline{L(t) = 100 \cdot 1,45^t}}$
- c) Berechne, wann sich die Heuschreckenpopulation verachtstacht hat und kontrolliere dein Ergebnis mit der graphischen Darstellung aus der Aufgabenstellung a). Markiere den berechneten Wert in der Aufgabenstellung a).

$$\begin{aligned} 8 \cdot 100 &= 100 \cdot 1,45^t & |:100 \\ 8 &= 1,45^t & |\log \square \\ \log(8) &= t \cdot \log(1,45) & |: \log(1,45) \\ t &= \frac{\log(8)}{\log(1,45)} \cong 5,60 \text{ Tage} \end{aligned}$$

Aufgabenstellung 2:

Im selben abgegrenzten Bereich zählt man zwei Tage nach Beginn des Frühlings 20 Heuschrecken der Gattung B. Acht Tage später wird die Zählung wiederholt und es werden 47 Heuschrecken gezählt. Die Zeit seit Beginn des Frühlings wird mit t in Tagen und der Gesamtzahl der Heuschrecken mit $H(t)$ angegeben.

- a) Stelle die Funktionsgleichung $H(t)$ in der Form $H(t) = H_0 \cdot e^{\lambda \cdot t}$ auf.
- b) Ermittle, um wieviel Prozent die Heuschreckenpopulation in einem Tag zunimmt.
- c) Ermittle, um wieviel Prozent die Heuschreckenpopulation in einer Stunde zunimmt.

Für zwei Tage nach Frühlingsbeginn gilt: $H(2) = 20$ und für weitere acht Tage später gilt: $H(10) = 47$

$$H(10) = H(2) \cdot a^8 \rightarrow 47 = 20 \cdot a^8 \rightarrow a = \sqrt[8]{\frac{47}{20}} \cong 1,1127$$

$$H(2) = H(0) \cdot a^2 \rightarrow H(0) = \frac{H(2)}{a^2} = \frac{20}{1,1127^2} \cong 16 \text{ Heuschrecken}$$

$$\text{Funktionsgleichung: } H(t) = 16 \cdot 1,1127^t$$

$$a = e^\lambda \rightarrow 1,1127 = e^\lambda \rightarrow \lambda = \ln(1,1127) \cong 0,1068$$

$$\text{Funktionsgleichung: } H(t) = 16 \cdot e^{0,1068 \cdot t} \quad \dots \text{Lösung der Aufgabenstellung a)}$$

Lösung b): Pro Tag wächst die Heuschreckenpopulation um 11,27%.

Lösung c): $1,1127^{\frac{1}{24}} \cong 1,0045$ Pro Stunde wächst die Heuschreckenpopulation um 0,45%.

Wachstums- und Zerfallsgesetz:

Exponentialfunktionen können eine beliebige positive Basis besitzen. In den Naturwissenschaften kommt die Euler'sche Zahl eine besondere Bedeutung zu. Neben der Darstellung $f(x) = c \cdot a^x$ wird daher auch oft die Darstellung $f(x) = c \cdot e^{\lambda x}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ verwendet.

	Exponentielles Wachstum	Exponentielle Abnahme/ Zerfall
beliebige Basis a	$N(t) = N_0 \cdot a^t$ mit $a > 1, t \geq 0$ a heißt Wachstumsfaktor	$N(t) = N_0 \cdot a^t$ mit $0 < a < 1, t \geq 0$ a heißt Abnahmefaktor
Basis e	$N(t) = N_0 \cdot e^{+\lambda t}$ mit $\lambda > 0, t \geq 0$ λ heißt Wachstumskonstante	$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$ mit $\lambda > 0, t \geq 0$ λ heißt Zerfallskonstante

λ ... „lambda“ griech. Kleinbuchstabe

Beispiele:

	Exponentielles Wachstum	Exponentielle Abnahme/ Zerfall
beliebige Basis a	$N(t) = 20 \cdot 1,23^t$	$N(t) = 20 \cdot 0,23^t$
Basis e	$N(t) = 20 \cdot e^{0,4 t}$	$N(t) = 20 \cdot e^{-0,4 t}$

Wichtige Bemerkung:

- Der **Anfangswert** wird mit N_0 bezeichnet und es gilt: $N_0 = N(t = 0)$
- Um wieviel sich eine Größe pro Zeiteinheit ändert, lässt sich aus dem Wachstums- bzw. Abnahme-gesetz nur dann ablesen, wenn es in der Form $f(x) = c \cdot a^x$ oder $N(t) = N_0 \cdot a^t$ vorliegt.

Musterbeispiel 1:

Stelle das Wachstumsgesetz $N(t) = 1500 \cdot 1,05^t$ mit Hilfe der Basis e dar!

Die beiden Wachstumsgesetze lauten:

$$N(t) = N_0 \cdot a^t \text{ und } N(t) = N_0 \cdot e^{+\lambda t}$$

Durch Vergleich der beiden, erkennt man, dass $a = e^\lambda$ gilt. Dieser Rechenansatz wird nun mit den entsprechenden Zahlen der Angabe durchgeführt.

$$a = e^\lambda \quad / \text{Einsetzen von } a = 1,05$$

$$1,05 = e^\lambda \quad / \ln$$

$$\ln(1,05) = \lambda \cdot \underbrace{\ln(e)}_{=1}$$

$$\ln(1,05) = \lambda \quad / \text{Berechne } \ln(1,05) \text{ im TR}$$

$$0,049 \approx \lambda$$

Das Wachstumsgesetz lautet nun:

$$N(t) = 1500 \cdot e^{0,049 \cdot t}$$

Musterbeispiel 2:

Eine Größe vermehrt sich nach dem Wachstumsgesetz $N(t) = 490 \cdot e^{0,04879 \cdot t}$, wobei t in Jahren gemessen wird. Um wie viel Prozent nimmt die Größe jährlich zu?

Um zu bestimmen, um wieviel Prozent die Größe jährlich zunimmt, muss die Darstellungsart $N(t) = N_0 \cdot a^t$ verwendet werden. Nur hier können Prozentangaben abgelesen werden!

Daher müssen die beiden Wachstumsgesetze verglichen werden.

Diese lauten: $N(t) = N_0 \cdot a^t$ und $N(t) = N_0 \cdot e^{+\lambda t}$

Durch Vergleich der beiden, erkennt man, dass $a = e^\lambda$ gilt. Dieser Rechenansatz wird nun mit den entsprechenden Zahlen der Angabe durchgeführt.

Das Wachstumsgesetz lautet:

$$a = e^\lambda \quad / \text{Einsetzen von } e^{0,04879}$$

$$a = e^{0,04879} \quad / \text{Berechne } e^{0,04879} \text{ im TR}$$

$$a \approx 1,05$$

$$N(t) = 490 \cdot 1,05^t$$

Aus dem Wachstumsgesetz kann man ablesen, dass die **Größe jährlich um 5 % steigt**.

Aufstellen eines Wachstums- bzw. Zerfallsgesetzes aus zwei bekannten Werten

Musterbeispiel:

Der Holzbestand eines Waldes wurde 2005 auf 150 000 Kubikmeter geschätzt. Fünf Jahre später, im Jahre 2010, ergab die Schätzung 168 000 m³. Es wird ein exponentielles Wachstum abgenommen. Stelle ein Wachstumsgesetz für den Holzbestand h mit $h(t) = h_0 \cdot a^t$ in Abhängigkeit von den seit 2000 vergangenen Jahren t auf.

1.Schritt: Berechnung des Parameters a

Aus der Angabe wissen wir, dass das Jahr null das Jahr 2000 ist ($h_0 = h(0)$).

Aus der Angabe wissen wir zwei Werte:

Der Holzbestand im Jahr 2005 ist 150 000 m³ $\rightarrow h(5) = 150\,000$

Holzbestand im Jahr 2010 ist 168 000 m³ $\rightarrow h(10) = 168\,000$

Die beiden Werte für $h(5)$ und $h(10)$ sowie die Eigenschaft

$f(x+h) = f(x) \cdot a^h$ wird verwendet, um den Parameter a zu berechnen.

Bemerkung: Runde den Parameter a immer auf 4 Nachkommastellen, sofern nicht anders angegeben!

$$h(5) = 150\,000$$

$$h(10) = 168\,000$$

$$h(10) = h(5) \cdot a^5$$

$$168\,000 = 150\,000 \cdot a^5$$

$$a^5 = \frac{168\,000}{150\,000}$$

$$a = \sqrt[5]{\frac{168\,000}{150\,000}}$$

$$a \approx 1,0229$$

2.Schritt: Berechnung des Wertes h_0

Um h_0 zu berechnen wird erneut die Eigenschaft

$f(x+h) = f(x) \cdot a^h$ verwendet. Achte hier auf die Reihenfolge!

Durch Einsetzen und Umformen, kann $h(0)$ ermittelt werden.

Runde hier auf Ganze, da in der Angabe auch auf Ganze gerundet ist.

$h(0) \approx 133945$ gibt die Kubikmeter an Holz im Jahr 2000 an.

$$h(5) = h(0) \cdot a^5$$

$$150\,000 = h(0) \cdot 1,0229^5$$

$$\frac{150\,000}{1,0229^5} = h(0)$$

$$h(0) \approx 133945$$

3.Schritt: Wachstumsgesetz aufstellen

Aus der Angabe wissen wir, dass das Wachstumsgesetz in der Form

$h(t) = h_0 \cdot a^t$ verlangt wird. Durch Einsetzen der zuvor berechneten Werte für h_0 und a kann das Wachstumsgesetz angeschrieben werden.

Es gilt:

$$h(t) = h_0 \cdot a^t$$

Wachstumsgesetz:

$$h(t) = 133\,945 \cdot 1,0229^t$$

Ermittlung von Zeiten im Exponenten

Musterbeispiel:

Eine Bakterienkultur wächst stündlich um 80%. Zu Beginn besteht sie aus 800 Bakterien.

Ermittle **wann** sich die Zahl der **Bakterien verzehnfacht** hat!

1.Schritt: Aufstellen des Wachstumsgesetzes

Da sich die Bakterien stündlich um 80% vermehren, muss pro Stunde mit dem Faktor 1,80 multipliziert werden. Damit gilt für den Parameter

$$a = 1,80 \text{ (Erklärung: } 100\% + 80\% = 180\% = \frac{180}{100} = 1,80)$$

Da zu Beginn 800 Bakterien vorhanden sind, gilt: $N_0 = 800$

Es gilt:

$$N(t) = N_0 \cdot a^t$$

Wachstumsgesetz:

$$N(t) = 800 \cdot 1,80^t$$

2.Schritt: Ermittlung der Zeit t , wann sich die Bakterienzahl

verzehnfacht hat $\rightarrow$ Hochzahl t ist gesucht $\rightarrow$ Logarithmus muss verwendet werden

Zu Beginn sind 800 Bakterien. Werden diese verzehnfacht, dann sind

$10 \cdot 800$ Bakterien vorhanden $\rightarrow N(t) = 10 \cdot 800$

Um nun den gesuchten Zeitpunkt zu ermitteln, muss $10 \cdot 800$ gleich dem Wachstumsgesetz gestellt werden und daraus die Zeit t ermittelt werden.

Man erkennt also, dass die Zeit unabhängig von der Anfangszahl der Bakterien ist und nur von dem Wachstumsfaktor a abhängt!

$$N(t) = 8000 \quad \text{und}$$

$$N(t) = 800 \cdot 1,80^t$$

$$10 \cdot 800 = 800 \cdot 1,80^t \quad | : 800$$

$$10 = 1,80^t \quad | \log$$

$$\log(10) = \log(1,80^t)$$

$$\log(10) = t \cdot \log(1,80) \quad |$$

$$\log(1,80)$$

$$t = \frac{\log(10)}{\log(1,80)}$$

$$t \approx 3,92 \text{ h}$$