



Unterrichtseinheiten

Titel	Grüne Geometrie 2 (Mathematik im Blumenbeet)
Mathematisches Thema	Anwendung der Differential- und Integralrechnung
Alter der SchülerInnen/ Schulstufe	17-18 Jahre (Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe II)
Länge der Einheit	1 x 50 Minuten bis maximal 2 x 50 Minuten

Benötigte Materialien:

- Arbeitsblatt „Mathematik im Blumengarten“ (siehe Anhang)
- Computer mit Technologie, z.B. GeoGebra
- Materialien aus dem täglichen Unterricht (Stift, Papier, Taschenrechner)

Zeit	Sozialform	Inhalt und Anmerkung
ca. 5 min	Lehrer-Schüler-Gespräch	Die Lehrperson motiviert die Schülerinnen und Schüler für das Thema der Stunde und erklärt seine Bedeutung im Alltag.
ca. 35 min	Partnerarbeit oder Kleingruppen	Die Schülerinnen und Schüler lösen die Aufgabenstellungen des Arbeitsblattes in Zweier- oder Dreier-Teams. Die Lehrperson geht durch die Klasse und hilft bei auftretenden Problemen.
ca. 15 min	Lehrer-Schüler-Gespräch	Vergleichen der Ergebnisse der Aufgaben

Quelle zu den kleinen Blumenbildern am Arbeitsblatt:

<https://www.freeimages.com/de/clipart/buttercup-flower-clip-art-5347384>

Anmerkung:

Sollte die Klasse sehr engagiert und begeistert an der Aufgabenstellung arbeiten, kann eine weitere „schwierigere“ Aufgabe (Aufgabe 4) ergänzt werden. Dabei handelt es sich um eine Extremwertaufgabe aus der Differentialrechnung.

★ Aufgabe 4:

Um die Gartenfläche möglichst optimal auszunutzen, stellt sich die Kundin die Frage welche optimale Breite x das Grundstück haben müssten, damit die maximale Gesamtfläche der Blumenbeete im Garten gewährleistet wird. Ermittle nachvollziehbar.

Die Form des Blumenbeets wird durch eine Funktion f beschrieben, wobei x die Breite des Beets in Metern angibt und $f(x)$ die Höhe des Blumenbeets in Metern angibt.

Eine Gärtnerin legt das Blumenbeet einer Kundin so an, dass das Blumenbeet an den Rändern des Gartens beginnen und in der Mitte des Gartens seine maximale Höhe erreicht. Die Kundin merkt an, dass das Blumenbeet eine maximale „Höhe“ von drei Metern haben soll. Weiters weiß man, dass die Funktion f nur für $0 \leq x \leq 10$ definiert ist.

- Platz für deine Skizze:

- | Eigenschaft in Worten | Mathematische Bedingung |
|---|---|
| Das Blumenbeet beginnt an den Rändern des Gartens.
Diese Ränder sind bei $x = \underline{\hspace{2cm}}$ und $x = \underline{\hspace{2cm}}$. | I: <u> </u>
II: <u> </u> |
| Das Blumenbeet hat in der Mitte des Gartens seine maximale Höhe. Die Mitte des Gartens liegt bei $x = \underline{\hspace{2cm}}$. | III: <u> </u> |
| Die Kundin merkt an, dass das Blumenbeet eine maximale „Höhe“ von drei Metern haben soll. | IV: <u> </u> |

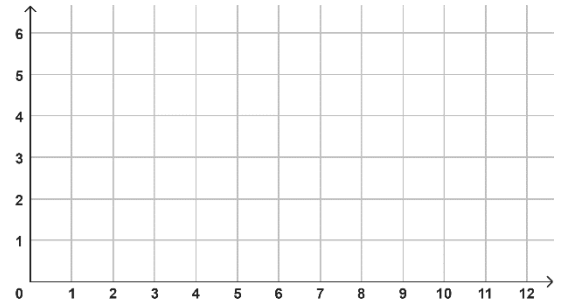
Polynomfunktion vom Grad _____ : Diese ist allgemein gegeben durch: $f(x) =$ _____

Die gesuchte Polynomfunktion ist gegeben durch: $f(x) =$

Aufgabe 2:

Skizziere die Polynomfunktion, die das Blumenbeet beschreibt, nochmals ins gegebene Koordinatensystem.

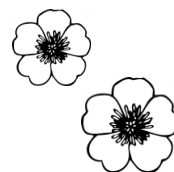
Schätze mit Hilfe von jeweils fünf Unter- und Obersummen den tatsächlichen Flächeninhalt des Blumenbeetes ab.

**Aufgabe 3:**

Ermittle die tatsächliche Gesamtfläche des Blumenbeetes im Garten.



Mathematik im Blumenbeet -Lösung



In einem rechteckigen Garten soll ein Blumenbeet angelegt werden.

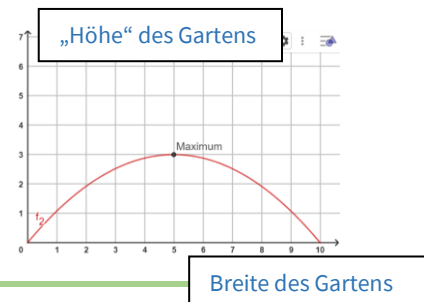
Die Form des Blumenbeets wird durch eine Funktion f beschrieben, wobei x die Breite des Beets in Metern angibt und $f(x)$ die Höhe des Blumenbeets in Metern angibt.

Aufgabe 1:

Eine Gärtnerin legt das Blumenbeet einer Kundin so an, dass das Blumenbeet an den Rändern des Gartens beginnen und in der Mitte des Gartens seine maximale Höhe erreicht. Die Kundin merkt an, dass das Blumenbeet eine maximale „Höhe“ von drei Metern haben soll. Weiters weiß man, dass die Funktion f nur für $0 \leq x \leq 10$ definiert ist.

- a) Fertige eine Skizze des Gartens mit dem Blumenbeet an und beschrifte es so weit wie möglich.

Platz für deine Skizze:



- b) Ermittle anhand der obigen Angaben die Termdarstellung einer Funktion f , die den Verlauf des Blumenbeets im Garten beschreibt. Verwende dazu die nachfolgenden Eigenschaften.

	Eigenschaft in Worten	Mathematische Bedingung
1)	Das Blumenbeet beginnt an den Rändern des Gartens. Diese Ränder sind bei $x = \underline{0}$ und $x = \underline{10}$.	I: $\underline{f(0) = 0}$ II: $\underline{f(10) = 0}$
2)	Das Blumenbeet hat in der Mitte des Gartens seine maximale Höhe. Die Mitte des Gartens liegt bei $x = \underline{5}$.	III: $\underline{f'(5) = 0}$
3)	Die Kundin merkt an, dass das Blumenbeet eine maximale „Höhe“ von drei Metern haben soll.	IV: $\underline{f(5) = 3}$

Überlege zunächst den Grad der Polynomfunktion, der für diese Gestaltung des Blumenbeetes am besten und einfachsten geeignet ist.

Polynomfunktion vom Grad 2: Diese ist allgemein gegeben durch: $f(x) = \underline{ax^2 + bx + c}$

Ermittle unterhalb nachvollziehbar die gesuchte Polynomfunktion, die das Blumenbeet beschreibt:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{und} \quad f'(x) = 2ax + b$$

$$\begin{aligned} \text{I: } f(0) &= 0 & a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c &= 0 & \rightarrow c &= 0 \\ \text{II: } f(10) &= 0 & a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c &= 0 & \rightarrow 100a + 10b &= 0 \\ \text{III: } f'(5) &= 0 & 2 \cdot a \cdot 5 + b &= 0 & \rightarrow 10a + b &= 0 \\ \text{IV: } f(5) &= 3 & a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c &= 3 & \rightarrow 25a + 5b &= 3 \end{aligned}$$

Aus Gleichung III und IV ergibt sich das Gleichungssystem:

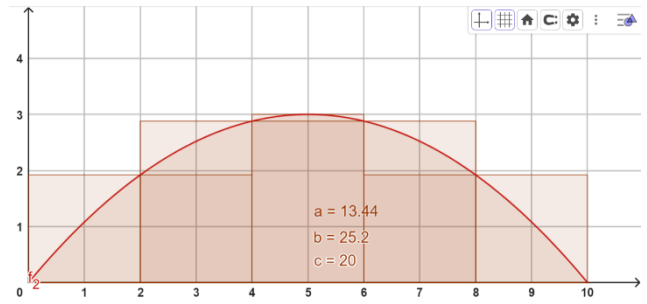
$$\begin{aligned} \text{III: } 10a + b &= 0 & | \cdot (-5) & & -25a &= 3 & | : (-25) & \rightarrow a = -\frac{3}{25} \\ \text{IV: } 25a + 5b &= 3 & & & & & & \\ \text{III: } -50a - 5b &= 0 & & & 10a + b &= 0 & | -b & \\ \text{IV: } 25a + 5b &= 3 & & & 10a &= -b & & \\ & & & & b &= \frac{30}{25} = \frac{6}{5} & & \end{aligned}$$

Die gesuchte Polynomfunktion ist gegeben durch: $f(x) = -\frac{3}{25}x^2 + \frac{6}{5}x$

Aufgabe 2:

Skizziere die Polynomfunktion, die das Blumenbeet beschreibt, nochmals ins gegebene Koordinatensystem.

Schätze mit Hilfe von jeweils fünf Unter- und Obersummen den tatsächlichen Flächeninhalt des Blumenbeetes ab.



Für die Abschätzung des Flächeninhaltes mit Hilfe von Ober- bzw. Untersummen werden einige Funktionswerte benötigt, dessen Werte in der nachfolgenden Wertetabelle (gerundet) angegeben werden.

x	0	2	4	5	6	8	10
$f(x)$	0	1,92	2,88	3	2,88	1,92	0

Untersumme: $U_5 = 2 \cdot [f(0) + f(2) + f(4) + f(8) + f(10)]$
 $U_5 \cong 13,44$

Obersumme: $O_5 = 2 \cdot [f(2) + f(4) + f(5) + f(6) + f(8)]$
 $O_5 \cong 25,2$

Es gilt: $13,44 \text{ m}^2 < \text{tatsächliche Fläche} < 25,2 \text{ m}^2$

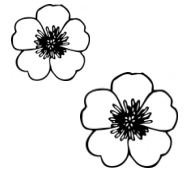
Aufgabe 3:

Ermittle die tatsächliche Gesamtfläche des Blumenbeetes im Garten.

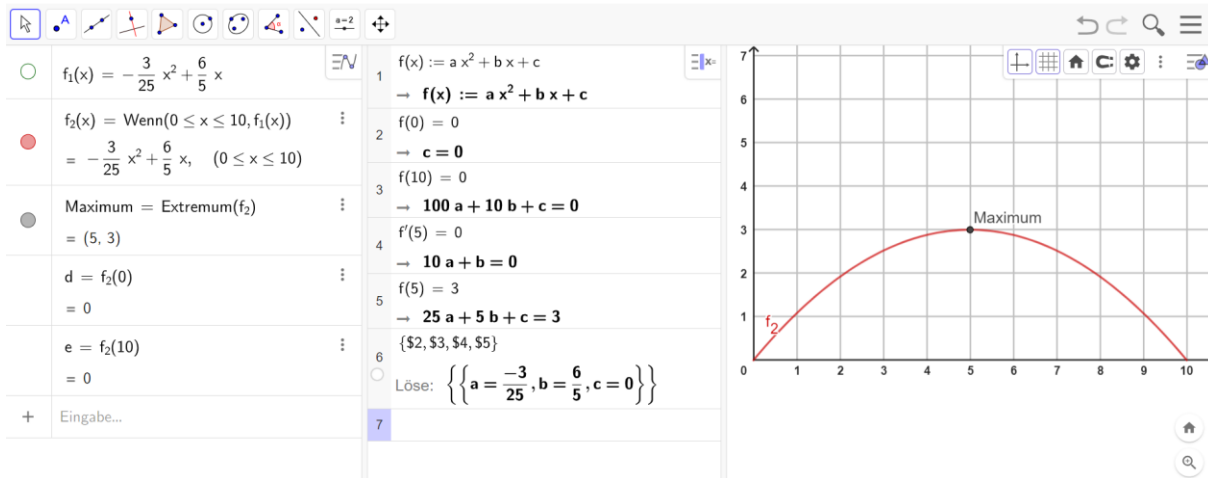
$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^{10} f(x) dx = \int_0^{10} \left(-\frac{3}{25}x^2 + \frac{6}{5}x \right) dx = \left(-\frac{3x^3}{25 \cdot 3} + \frac{6x^2}{5 \cdot 2} \right) \Big|_0^{10} \\
 &= \left(-\frac{3 \cdot 10^3}{25 \cdot 3} + \frac{6 \cdot 10^2}{5 \cdot 2} \right) - \left(-\frac{3 \cdot 0^3}{25 \cdot 3} + \frac{6 \cdot 0^2}{5 \cdot 2} \right) = (-40 + 60) = 20
 \end{aligned}$$

Die tatsächliche Größe des Blumenbeetes ist 20m².





Lösung zu Aufgabe 1a) und 1b) mit Hilfe von Technologie (GeoGebra):



Lösung zu Aufgabe 3 und Aufgabe 4 mit Hilfe von Technologie (GeoGebra):

