



Περιγραφή Ενότητας

Τίτλος	Εφαρμογές Εκθετικών Συναρτήσεων
Ηλικία μαθητών/τάξη	16 ετών
Διάρκεια της ενότητας	1 x 50 λεπτά
Μαθηματικό θέμα	Μη γραμμικές συναρτήσεις
Προαπαιτούμενες γνώσεις	<ul style="list-style-type: none">• Ιδιότητες εκθετικών συναρτήσεων• Ερμηνεία γραφημάτων
Απαιτούμενα υλικά	<ul style="list-style-type: none">• Φύλλο εργασίας "Εφαρμογές Εκθετικών Συναρτήσεων" (1 αντίγραφο ανά μαθητή)• Κάρτες ευρετηρίου "Ανάπτυξη και αποσύνθεση" (μερικά αντίγραφα, αν είναι δυνατόν πλαστικοποιημένα)• Αριθμομηχανή
Στόχοι	<ul style="list-style-type: none">• Εφαρμογή εκθετικών συναρτήσεων σε πραγματικά προβλήματα• Εδραίωση της γνώσης των εκθετικών συναρτήσεων• Εργασία με μαθηματικά μοντέλα πραγματικών προβλημάτων
Σημειώσεις σχετικά με την εργασία με μετανάστες μαθητές	<ul style="list-style-type: none">•••

Σχέδιο μαθήματος:

Πριν από την έναρξη του μαθήματος, τα αντίγραφα των καρτών ευρετηρίου διανέμονται σε λίγους μαθητές στην τάξη. Κάθε μέρος θα πρέπει να έχει ένα πλήρες σύνολο των καρτών ευρετηρίου. Αυτά τα μέρη χρησιμεύουν ως "σταθμοί βοήθειας" όπου οι μαθητές μπορούν να αναζητήσουν πληροφορίες που θα τους βοηθήσουν να λύσουν τις εργασίες του φύλλου εργασίας.

Ώρα	Μέθοδος	Περιεχόμενο και σχόλια
περίπου 10 λεπτά	Παρουσίαση και δυαδική επικοινωνία Εκπαιδευτικού-μαθητών	Ο/η εκπαιδευτικός παρακινεί τους μαθητές για το θέμα του μαθήματος και περιγράφει τη σημασία των ποσοστών στην καθημερινή ζωή. Ο δάσκαλος, μαζί με τους μαθητές, επαναλαμβάνει τις κύριες έννοιες και ιδιότητες των εκθετικών συναρτήσεων.
περίπου 25 λεπτά	Εργασία σε ομάδα	Οι μαθητές επιλύουν τις εργασίες του φύλλου εργασίας συνεγαικά (2 μαθητές). Ο/η εκπαιδευτικός υποστηρίζει τις ομάδες αν χρειαστεί.
περίπου 15 λεπτά	Επικοινωνία εκπαιδευτικού μαθητών	Σύγκριση των αποτελεσμάτων

Εφαρμογές Εκθετικών Συναρτήσεων – Φύλλο εργασίας

Οι ακρίδες είναι έντομα που είναι ευρέως διαδεδομένα σε πολλές χώρες του κόσμου. Υπάρχουν πολλά είδη ακρίδων, αλλά όλα έχουν ισχυρά οπίσθια πόδια που τους επιτρέπουν να πηδούν.



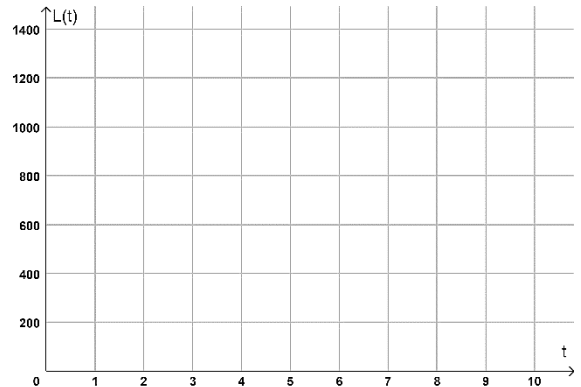
Οι προνύμφες των ακρίδων εκκολάπτονται στις αρχές της Άνοιξης όταν ζεσταίνονται. Τρέφονται με τους νεαρούς βλαστούς φυτών και δέντρων. Ο πληθυσμός των ακρίδων αυξάνεται εκθετικά όταν οι συνθήκες είναι ιδανικές γι' αυτούς.

Εργασία 1:

Στις αρχές της άνοιξης, 100 ακρίδες του είδους Α παρατηρούνται σε μια καθορισμένη περιοχή.

Θεωρείται ότι ο πληθυσμός θα αυξηθεί κατά 45% ημερησίως τις επόμενες ημέρες. Ο χρόνος από την αρχή της άνοιξης δίνεται ως ημέρες και ο συνολικός αριθμός ακρίδων ως $L(t)$

- a) Δημιουργήστε μια γραφική παράσταση της εξέλιξης του πληθυσμού των ακρίδων μέσα σε μία εβδομάδα. Καταγράψτε τις υπολογισμένες τιμές κάθε ημέρας.



- b) Ορίστε την εξίσωση για τη συνάρτηση $L(t)$ με μορφή : $L(t) = L_0 \cdot a^t$
- c) Υπολογίστε πότε ο πληθυσμός των ακρίδων έχει αυξηθεί οκτώ φορές και ελέγξτε το αποτέλεσμα σας με το γράφημα από την εργασία α). Σημειώστε την υπολογιζόμενη τιμή στην εργασία α).

Εργασία 2:

Στην ίδια καθορισμένη περιοχή, 20 ακρίδες του είδους Β καταμετρούνται δύο ημέρες μετά την έναρξη της άνοιξης. Οκτώ ημέρες αργότερα η καταμέτρηση επαναλαμβάνεται και μετριοούνται 47 ακρίδες. Ο χρόνος t , από την αρχή της άνοιξης δίνεται ως ημέρες και ο συνολικός αριθμός ακρίδων ως $H(t)$.

- a) Ορίστε την εξίσωση για $H(t)$ με μορφή : $H(t) = H_0 \cdot e^{\lambda \cdot t}$
- b) Προσδιορίστε με ποιο ποσοστό αυξάνεται ο πληθυσμός των ακρίδων σε μια μέρα.
- c) Προσδιορίστε με ποιο ποσοστό αυξάνεται ο πληθυσμός ακρίδων σε μία ώρα.

Εφαρμογές εκθετικών συναρτήσεων – Φύλλο εργασίας με λύσεις

Οι ακρίδες είναι έντομα που είναι ευρέως διαδεδομένα σε πολλές χώρες του κόσμου. Υπάρχουν πολλά είδη ακρίδων, αλλά όλα έχουν ισχυρά οπίσθια πόδια που τους επιτρέπουν να πηδούν.

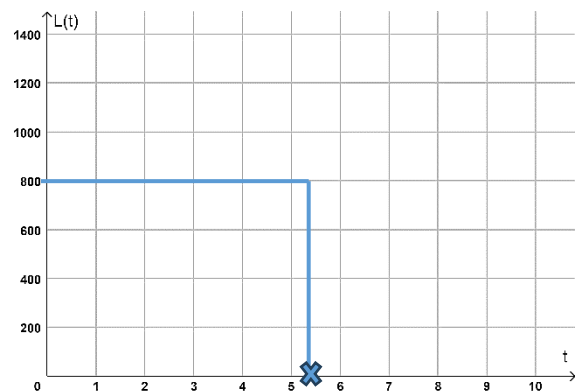


Οι προνύμφες των ακρίδων εκκολάπτονται στις αρχές της άνοιξης όταν ζεσταίνονται. Τρέφονται με τους νεαρούς βλαστούς φυτών και δέντρων. Ο πληθυσμός των ακρίδων αυξάνεται εκθετικά όταν οι συνθήκες είναι ιδανικές γι' αυτούς.

Εργασία 1:

Στις αρχές της άνοιξης, 100 ακρίδες του είδους Α παρατηρούνται σε μια καθορισμένη περιοχή. Θεωρείται ότι ο πληθυσμός θα αυξηθεί κατά 45% ημερησίως τις επόμενες ημέρες. Ο χρόνος t από την αρχή της άνοιξης δίνεται ως ημέρες και ο συνολικός αριθμός ακρίδων ως $L(t)$.

- a) Δημιουργήστε μια γραφική παράσταση της εξέλιξης του πληθυσμού των ακρίδων μέσα σε μία εβδομάδα. Καταγράψτε τις υπολογισμένες τιμές κάθε ημέρας.



- b) Ορίστε μια εξίσωση για τη συνάρτηση $L(t)$ στη μορφή: $L(t) = L_0 \cdot a^t$ $L(t) = 100 \cdot 1.45^t$
- c) Υπολογίστε πότε ο πληθυσμός των ακρίδων έχει αυξηθεί οκτώ φορές και ελέγξτε το αποτέλεσμα σας με το γράφημα από την εργασία α). Σημειώστε την υπολογιζόμενη τιμή στην εργασία α).

$$\begin{aligned} 8 \cdot 100 &= 100 \cdot 1.45^t & |: 100 \\ 8 &= 1.45^t & |\log \\ \log(8) &= t \cdot \log(1.45) & |: \log(1.45) \\ t &= \frac{\log(8)}{\log(1.45)} \cong 5.60 \text{ days} \end{aligned}$$

Εργασία 2:

Στην ίδια καθορισμένη περιοχή, 20 ακρίδες του είδους Β καταμετρούνται δύο ημέρες μετά την έναρξη της άνοιξης. Οκτώ ημέρες αργότερα η καταμέτρηση επαναλαμβάνεται και μετριοούνται 47 ακρίδες. Ο χρόνος t από την αρχή της άνοιξης δίνεται ως ημέρες και ο συνολικός αριθμός ακρίδων ως $H(t)$.

- a) Ορίστε μια εξίσωση για τη συνάρτηση $H(t)$ στη μορφή: $H(t) = H_0 \cdot e^{\lambda \cdot t}$
- b) Προσδιορίστε με ποιο ποσοστό αυξάνεται ο πληθυσμός των ακρίδων σε μια μέρα.
- c) Προσδιορίστε με ποιο ποσοστό αυξάνεται ο πληθυσμός ακρίδων σε μία ώρα.

Δύο ημέρες μετά την έναρξη της άνοιξης παίρνει κανείς: . Οκτώ ημέρες αργότερα κάποιος παίρνει: $H(2) = 20$ $H(10) = 47$

$$H(10) = H(2) \cdot a^8 \rightarrow 47 = 20 \cdot a^8 \rightarrow a = \sqrt[8]{\frac{47}{20}} \cong 1.1127$$

$$H(2) = H(0) \cdot a^2 \rightarrow \text{Ακρίδες } H(0) = \frac{H(2)}{a^2} = \frac{20}{1.1127^2} \cong 16$$

$$\text{Εξίσωση: } H(t) = 16 \cdot 1.1127^t$$

$$a = e^\lambda \rightarrow 1.1127 = e^\lambda \rightarrow \lambda = \ln(1.1127) \cong 0.1068$$

$$\text{Εξίσωση:} \dots \text{ Λύση της εργασίας α) } H(t) = 16 \cdot e^{0.1068 \cdot t}$$

Λύση της εργασίας β): Ο πληθυσμός των ακρίδων αυξάνεται κατά 11,27% ανά ημέρα

Λύση της εργασίας γ): Ο πληθυσμός των ακρίδων αυξάνεται κατά 0,45% ανά ώρα. $1.1127^{\frac{1}{24}} \cong 1.0045$

Νόμοι ανάπτυξης και αποσύνθεσης:

Οι εκθετικές συναρτήσεις μπορούν να έχουν μια αυθαίρετη θετική βάση. Ο αριθμός του Euler χρησιμοποιείται συχνά στις φυσικές επιστήμες,. Εκτός από τη γενική αναπαράσταση $ef(x) = c \cdot a^x$, συχνά χρησιμοποιείται: $f(x) = c \cdot e^{\lambda x} \lambda \in \mathbb{R}$

	Εκθετική αύξηση	Εκθετική μείωση / απόσβεση
Αυθαίρετη βάση a	$N(t) = N_0 \cdot a^t$ με $a > 1, t \geq 0$ a ονομάζεται αυξητικός παράγοντας	$N(t) = N_0 \cdot a^t$ με $0 < a < 1, t \geq 0$ a ονομάζεται παράγοντας μείωσης
Βάση e	$N(t) = N_0 \cdot e^{+\lambda t}$ με $\lambda > 0, t \geq 0$ λ ονομάζεται σταθερά ανάπτυξης	$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$ με $\lambda > 0, t \geq 0$ λ ονομάζεται σταθερά απόσβεσης

λ ... "λάμδα", ελληνικό γράμμα

Παραδείγματα:

	Εκθετική αύξηση	Εκθετική μείωση / απόσβεση
Αυθαίρετη βάση a	$N(t) = 20 \cdot 1.23^t$	$N(t) = 20 \cdot 0.23^t$
Βάση e	$N(t) = 20 \cdot e^{0.4 t}$	$N(t) = 20 \cdot e^{-0.4 t}$

Σημαντικές παρατηρήσεις:

- Ο αρχική τιμή συμβολίζεται με N_0 , που σημαίνει: $N_0 = N(t = 0)$
- Πόσο αλλάζει μια τιμή ανά μονάδα χρόνου μπορεί να διαβαστεί μόνο από το νόμο της ανάπτυξης ή της αποσύνθεσης, αν είναι στη μορφή $f(x) = c \cdot a^x$ ή $N(t) = N_0 \cdot a^t$

Εργασία επίδειξης 1:

Εκφράστε το νόμο εκθετικής ανάπτυξης $N(t) = 1500 \cdot 1.05^t$ χρησιμοποιώντας τη βάση e

Οι δύο μορφές του νόμος εκθετικής ανάπτυξης είναι:

$$N(t) = N_0 \cdot a^t \text{ και } N(t) = N_0 \cdot e^{+\lambda t}$$

Συγκρίνοντας αυτά τα δύο, μπορεί κανείς να δει ότι $a = e^\lambda$. Αυτό μπορεί τώρα να συμπληρωθεί με τους αριθμούς από την εργασία.

Ο νόμος εκθετικής ανάπτυξης (με βάση) είναι τώρα:

$$N(t) = 1500 \cdot e^{0.049 \cdot t}$$

$a = e^\lambda$ / Συμπλήρωση $a = 1.05$
 $1.05 = e^\lambda$ / $\ln$
 $\ln(1.05) = \lambda \cdot \underbrace{\ln(e)}_{=1}$
 / Υπολογίστε $\ln(1.05)$ $\ln(1.05) = \lambda$
 $0.049 \approx \lambda$

Εργασία επίδειξης 2:

Μια ποσότητα αυξάνεται σύμφωνα με το νόμο εκθετικής ανάπτυξης, όπου μετريέται σε χρόνια. Με ποιο ποσοστό αυξάνεται η ποσότητα ανά έτος; $N(t) = 490 \cdot e^{0.04879 \cdot t}$

Για να μάθετε με ποιο ποσοστό αυξάνεται η ποσότητα ετησίως, πρέπει να χρησιμοποιήσετε τη φόρμα $N(t) = N_0 \cdot a^t$. Μόνο εκεί μπορεί κανείς να διαβάσει το ποσοστό.

Οι δύο μορφές του νόμος εκθετικής ανάπτυξης πρέπει να συγκριθούν. Αυτά είναι: $N(t) = N_0 \cdot a^t$ και $N(t) = N_0 \cdot e^{+\lambda t}$

Συγκρίνοντας αυτά τα δύο, μπορεί κανείς να δει ότι $a = e^\lambda$. Αυτό μπορεί τώρα να συμπληρωθεί με τους αριθμούς από την εργασία.

Ο νόμος εκθετικής ανάπτυξης (με βάση) είναι τώρα:

$$N(t) = 490 \cdot 1.05^t$$

Από την εξίσωση αυτή μπορεί κανείς να διαβάσει ότι η ποσότητα αυξάνεται κατά 5 % ετησίως.

$a = e^\lambda$ / Συμπλήρωση $e^{0.04879}$
 $a = e^{0.04879}$ / Υπολογίζω $e^{0.04879}$
 $a \approx 1.05$

Θέσπιση νόμου ανάπτυξης ή απόσβεσης, χρησιμοποιώντας δύο γνωστές τιμές

Εργασία ως παράδειγμα:

Το απόθεμα ξυλείας ενός δάσους εκτιμήθηκε σε 150 000 κυβικά μέτρα το 2005. Πέντε χρόνια αργότερα, το 2010, η εκτίμηση ήταν 168.000 κυβικά μέτρα. Θεωρείται ότι θα υπάρξει εκθετική αύξηση. Θέσπιση νόμου ανάπτυξης για το απόθεμα ξυλείας σε συνάρτηση με $h(t) = h_0 \cdot a^t$ τον αριθμό των ετών t που έχουν περάσει από το 2000.

Βήμα 1: Υπολογισμός παραμέτρου a

Από το κείμενο των καθηκόντων, γνωρίζουμε ότι αυτό σημαίνει το έτος 2000 ($t = 0$) $h_0 = h(0)$

Επίσης, γνωρίζουμε δύο τιμές:

Το απόθεμα ξυλείας το 2005 ανέρχεται σε 150 000 m³ $\rightarrow h(5) = 150\,000$

Το απόθεμα ξυλείας το 2010 ανέρχεται σε 168 000 m³ $\rightarrow h(10) = 168\,000$

Οι δύο αξίες $h(5)$ και η ιδιότητα $h(10)$

$f(x+h) = f(x) \cdot a^h$ χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό της παραμέτρου a

Σημείωση: Για την επίλυση των εργασιών του φύλλου εργασίας, στρογγυλοποιήστε την παράμετρο a σε 4 δεκαδικά ψηφία, εκτός εάν αναφέρεται διαφορετικά!

Βήμα 2: Υπολογισμός της αξίας του h_0

Για να υπολογίσουμε, χρησιμοποιούμε ξανά το ακίνητο h_0

$f(x+h) = f(x) \cdot a^h$

$h(0)$ μπορεί να βρεθεί συμπληρώνοντας τις γνωστές τιμές.

Εδώ στρογγυλοποιούμε σε ακέραιους αριθμούς, καθώς το κείμενο των εργασιών χρησιμοποιεί επίσης ακέραιους αριθμούς.

$h(0) \approx 133945$ δίνει το απόθεμα ξυλείας το έτος 2000.

Βήμα 3: Θέσπιση του νόμου για την ανάπτυξη

Η εργασία μας ζητά να χρησιμοποιήσουμε τη φόρμα $h(t) = h_0 \cdot a^t$.

Συμπληρώνοντας τις τιμές για και που μόλις υπολογίσαμε, ο νόμος εκθετικής ανάπτυξης μπορεί να ρυθμιστεί: $h_0 a$

$$h(5) = 150\,000$$

$$h(10) = 168\,000$$

$$h(10) = h(5) \cdot a^5$$

$$168\,000 = 150\,000 \cdot a^5$$

$$a^5 = \frac{168\,000}{150\,000}$$

$$a = \sqrt[5]{\frac{168\,000}{150\,000}}$$

$$a \approx 1.0229$$

$$h(5) = h(0) \cdot a^5$$

$$150\,000 = h(0) \cdot 1.0229^5$$

$$\frac{150\,000}{1.0229^5} = h(0)$$

$$h(0) \approx 133945$$

$$h(t) = h_0 \cdot a^t$$

Νόμος εκθετικής ανάπτυξης:

$$h(t) = 133\,945 \cdot 1.0229^t$$

Υπολογισμός τιμών t στον εκθέτη

Εργασία ως παράδειγμα:

Μια βακτηριακή καλλιέργεια αυξάνεται κατά 80% κάθε ώρα. Στην αρχή, αποτελείται από 800 βακτήρια. Υπολογίστε **πότε** ο αριθμός των βακτηρίων έχει δεκαπλασιαστεί!

Βήμα 1: Θέσπιση του νόμου για την ανάπτυξη

Δεδομένου ότι η βακτηριακή καλλιέργεια αυξάνεται κατά 80%, πρέπει να πολλαπλασιάσουμε με τον συντελεστή 1.80 για κάθε ώρα. Ως εκ τούτου, η παράμετρος a είναι

$$a = 1.80 \text{ (Επεξήγηση: } 100\% + 80\% = 180\% = \frac{180}{100} = 1.80)$$

Δεδομένου ότι στην αρχή υπάρχουν 800 βακτήρια, κάποιος παίρνει:

$$N_0 = 800$$

Βήμα 2: Υπολογίζοντας τον χρόνο t κατά τον οποίο ο αριθμός των βακτηρίων έχει δεκαπλασιαστεί $\rightarrow$ ψάχνουμε για τον εκθέτη t που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον λογάριθμο $\rightarrow$

Στην αρχή, υπάρχουν 800 βακτήρια. Εάν αυτά δεκαπλασιαστούν, υπάρχουν βακτήρια $10 \cdot 800 \rightarrow N(t) = 10 \cdot 800$

Για να μάθετε το χρόνο t , πρέπει να συμπληρωθεί στο νόμο εκθετικής ανάπτυξης, και στη συνέχεια το t μπορεί να υπολογιστεί. $10 \cdot 800$

Μπορεί κανείς να δει ότι ο χρόνος t είναι ανεξάρτητος από την αρχική τιμή του αριθμού των βακτηρίων. Εξαρτάται μόνο από τον παράγοντα ανάπτυξης a !

$$N(t) = N_0 \cdot a^t$$

Νόμος εκθετικής ανάπτυξης:

$$N(t) = 800 \cdot 1.80^t$$

$$N(t) = 8000 \text{ und}$$

$$N(t) = 800 \cdot 1.80^t$$

$$10 \cdot 800 = 800 \cdot 1.80^t \quad | :800$$

$$10 = 1.80^t \quad | \log$$

$$\log(10) = \log(1.80^t)$$

$$\log(10) = t \cdot \log(1.80) \quad | : \log(1.80)$$

$$t = \frac{\log(10)}{\log(1.80)}$$

$$t \approx 3.92 \text{ h}$$