Co-funded by the European Union

Περιγραφή Ενότητας

Τίτλος	**Εφαρμογές διανυσμάτων στην καθημερινή ζωή (Χάρτες)**
Ηλικία μαθητών/τάξη	15 ετών
Διάρκεια της ενότητας	1 x 50 λεπτά
Μαθηματικό θέμα	Διανύσματα
Προαπαιτούμενες γνώσεις	• Ιδιότητες των διανυσμάτων στο επίπεδο • Γραμμές στο επίπεδο • Παραμετρική αναπαράσταση γραμμής
Απαιτούμενα υλικά	• Φύλλο εργασίας "Υπολογισμοί με διανύσματα στην Αυστρία" (ένα αντίγραφο ανά μαθητή) • "Χάρτης της Αυστρίας" (ένας ανά ομάδα, ή εναλλακτικά τυπωμένος στο πίσω μέρος του φύλλου εργασίας για κάθε μαθητή)
Στόχοι	• Εφαρμογή διανυσμάτων σε ρεαλιστικά προβλήματα • Χρήση συντεταγμένων σε πραγματικό χάρτη • Μοντελοποίηση με χρήση διανυσμάτων
Σημειώσεις σχετικά με την εργασία με μετανάστες μαθητές	• Ως πιθανή επέκταση, κάθε ομάδα θα μπορούσε να δημιουργήσει τις δικές της εργασίες, χρησιμοποιώντας κατάλληλους χάρτες και ονόματα πόλεων από τις χώρες καταγωγής των μαθητών

Η υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής για την παραγωγή αυτής της έκδοσης δεν συνιστά έγκριση του περιεχομένου που αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις των συγγραφέων και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

Σχέδιο μαθήματος:

Το μάθημα σχεδιάζεται για το τέλος του θέματος "διανύσματα στο επίπεδο" και "γραμμές στο επίπεδο".

Ώρα	Μέθοδος	Περιεχόμενο και σχόλια
περίπου 10 λεπτά	Παρουσίαση και επικοινωνία Εκπαιδευτικού-μαθητή	Ο/η εκπαιδευτικός παρακινεί τους μαθητές για το θέμα του μαθήματος και περιγράφει τη σημασία των ποσοστών στην καθημερινή ζωή. Ο δάσκαλος, μαζί με τους μαθητές, επαναλαμβάνει τις κύριες έννοιες και ιδιότητες των διανυσμάτων (αναγνώριση διανυσματικών συντεταγμένων από μια γραφική αναπαράσταση, μέτρο ενός διανύσματος, παραμετρική αναπαράσταση μιας γραμμής). Αυτό θα μπορούσε επίσης να καταγραφεί στον μαυροπίνακα
περίπου 25 λεπτά	Συνεργασία με το διπλανό	Οι μαθητές επιλύουν τις εργασίες του φύλλου εργασίας σε εργασία συνεργάτη (2 μαθητές). Ο/η εκπαιδευτικός υποστηρίζει τις ομάδες αν χρειαστεί.
περίπου 15 λεπτά	Επικοινωνία Εκπαιδευτικού-μαθητή	Σύγκριση των αποτελεσμάτων

Υπολογισμοί με διανύσματα στην Αυστρία – Φύλλο εργασίας

Το δεδομένο σχήμα δείχνει τον χάρτη της Αυστρίας σε ένα δισδιάστατο σύστημα συντεταγμένων. Σε αυτό το σχήμα, φαίνονται ορισμένες πόλεις της Αυστρίας και της γειτονικής της χώρας Γερμανίας, όπως οι πόλεις της Βιέννης, του Γκρατς, του Λιντς, του Σάλτσμπουργκ, του Ίνσμπρουκ, του Μονάχου και πολλών άλλων. Οι συντεταγμένες των πόλεων δεν χρειάζεται να είναι ακέραιοι.

Εργασία 1:

a) Υποδείξτε σε ποια πόλη βρίσκεται κάποιος, όταν ξεκινά στο Σάλτσμπουργκ, η κίνηση γίνεται κατά μήκος του διανύσματος $\vec{u} = (4{,}5|-2)$ και στη συνέχεια κατά μήκος του διανύσματος $\vec{v} = (5|0)$

_____

b) Χρησιμοποιήστε διανυσματικό λογισμό για να προσδιορίσετε την απόσταση μεταξύ Βιέννης και Γκρατς.

c) Εξετάστε την απόσταση μεταξύ των πόλεων Μόναχο M και Βιέννη V. Το τμήμα MV διαιρείται με το σημείο T που προσδιορίζεται με την αναλογία 5:4. Ορίστε μια εξίσωση για να υπολογίσετε το σημείο T και να υποδείξετε σε ποιο μέρος (πόλη) βρίσκεται (περίπου) αυτό το σημείο στο χάρτη.

$T =$ _____ Πόλη:_____

Εργασία 2:

a) Δημιουργία παραμετρικής αναπαράστασης μιας γραμμής μεταξύ των πόλεων του Σάλτσμπουργκ και της Βιέννης. Χρησιμοποιήστε ένα διάνυσμα κατεύθυνσης που έχει ακέραιες συντεταγμένες.

b) Ορίστε την εξίσωση (κάθετη διανυσματική αναπαράσταση) της γραμμής από την εργασία 2α)

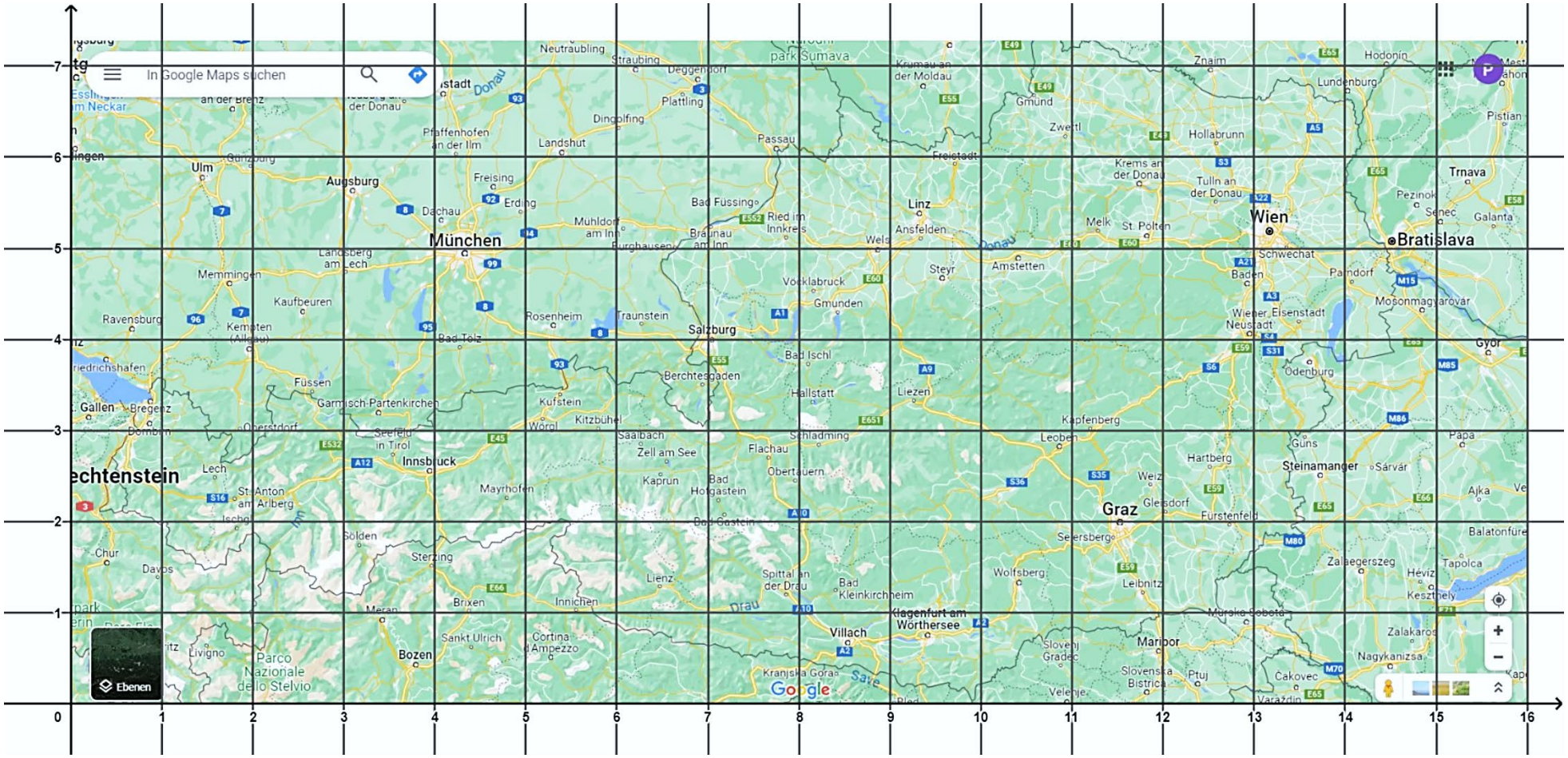
c) Η γραμμή g, που διέρχεται από τις πόλεις του Μονάχου και του Λιντς, δίνεται από:

$$g: X = \begin{pmatrix} 4.3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 25 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1) Δημιουργία γραμμής h παράλληλης με τη g και διερχόμενης από την πόλη του Σάλτσμπουργκ.

2) Δημιουργήστε μια γραμμή i που είναι παράλληλη με τη g και να διέρχεται από την πόλη του Σάλτσμπουργκ.

Χάρτης Αυστρίας



1 μονάδα στο σύστημα συντεταγμένων αντιστοιχεί σε περίπου 52 km στην πραγματικότητα

Υπολογισμοί με διανύσματα στην Αυστρία – Φύλλο εργασίας με λύσεις

Το δεδομένο σχήμα δείχνει τον χάρτη της Αυστρίας σε ένα δισδιάστατο σύστημα συντεταγμένων. Σε αυτό το σχήμα, φαίνονται ορισμένες πόλεις της Αυστρίας και της γειτονικής της χώρας Γερμανίας, όπως οι πόλεις της Βιέννης, του Γκρατς, του Λιντς, του Σάλτσμπουργκ, του Ίνσμπρουκ, του Μονάχου και πολλών άλλων. Οι συντεταγμένες των πόλεων δεν χρειάζεται να είναι ακέραιοι.

Εργασία 1:

d) Υποδείξτε σε ποια πόλη βρίσκεται κάποιος, όταν ξεκινά στο Σάλτσμπουργκ, η κίνηση γίνεται κατά μήκος του διανύσματος $\vec{u} = (4{,}5|-2)$ και στη συνέχεια κατά μήκος του διανύσματος $\vec{v} = (5|0)$

Villach

e) Χρησιμοποιήστε διανυσματικό λογισμό για να προσδιορίσετε την απόσταση μεταξύ Βιέννης και Γκρατς.

Συντεταγμένες Βιέννης: και Γκρατς $V = (13.2|5.2) G = (11.5|2)$
$\overrightarrow{VG} = G - V = \begin{pmatrix}11.5\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}13.2\\5.2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1.7\\-3.2\end{pmatrix}$ και $\left|\begin{pmatrix}-1.7\\-3.2\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-1.7)^2 + (-3.2)^2} = \sqrt{13.13} \approx 3.62$
Απόσταση στην πραγματικότητα: $3.62 \cdot 52\ km = 188.24\ km$

f) Εξετάστε την απόσταση μεταξύ των πόλεων Μόναχο και Βιέννη. Το τμήμα MV διαιρείται με το σημείο Τ σε αναλογία 5:4. Ορίστε μια εξίσωση για να υπολογίσετε το σημείο Τ και να υποδείξετε σε ποιο μέρος (πόλη) βρίσκεται (περίπου) αυτό το σημείο στο χάρτη.

$T = M + \frac{5}{9} \cdot \overrightarrow{MV}$ Πόλη: Ansfelden

Εργασία 2:

d) Δημιουργία παραμετρικής αναπαράστασης μιας γραμμής μεταξύ των πόλεων του Σάλτσμπουργκ και της Βιέννης. Χρησιμοποιήστε ένα διάνυσμα κατεύθυνσης που έχει ακέραιες συντεταγμένες.

Συντεταγμένες Βιέννης $V = (13.2|5.2)$και Σάλτσμπουργκ $S = (7|4)$
$\overrightarrow{SV} = V - S = \begin{pmatrix}13.2\\5.2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6.2\\1.2\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}62\\12\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}31\\6\end{pmatrix}$
$u: X = \begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}31\\6\end{pmatrix}$ … Παραμετρική αναπαράσταση γραμμής u

e) Εύρεση της εξίσωσης (κάθετη διανυσματική αναπαράσταση) της γραμμής από την εργασία 2α)

Το κατευθυντικό διάνυσμα της γραμμής u είναι $\begin{pmatrix}31\\6\end{pmatrix}$. Ένα κάθετο διάνυσμα της γραμμής u είναι $\begin{pmatrix}6\\-31\end{pmatrix}$.
Η γραμμική εξίσωση: $\vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot S$
$\begin{pmatrix}6\\-31\end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix}6\\-31\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}$ → $6x - 31y = 6 \cdot 7 + (-31) \cdot 4$ → $\boldsymbol{6x - 31y = -82}$

f) Ευθεία g, που διέρχεται από τις πόλεις του Μονάχου και του Λιντς, δίνεται από:

$$g: X = \begin{pmatrix}4.3\\5\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}25\\2\end{pmatrix}$$

1) Ορισμός γραμμής h παράλληλης με την g και διερχόμενης από την πόλη του Σάλτσμπουργκ.
$h: X = \begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}25\\2\end{pmatrix}$

2) Δημιουργήστε μια γραμμή i που είναι κάθετη στην g και διέρχεται από την πόλη του Σάλτσμπουργκ.

$i: X = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -25 \end{pmatrix}$