



Περιγραφή Ενότητας

Τίτλος	Αναπαράσταση στερεών στο επίπεδο
Ηλικία μαθητών/τάξη	13 χρόνια
Διάρκεια της ενότητας	3 x 50 λεπτά
Μαθηματικό θέμα	Προβολές στερεών στη γεωμετρία
Προαπαιτούμενες γνώσεις	<ul style="list-style-type: none">• Ιδιότητες βασικών στερεών (κύβος, διάφορες μορφές πρισμάτων, κύλινδρος, πυραμίδα, κώνος, σφαίρα)• Εργασία με εξισώσεις και μεταβλητές
Απαιτούμενα υλικά	<ul style="list-style-type: none">• Φύλλο πληροφοριών 1 (για το μάθημα 1)• Φύλλο εργασίας 1 (για το μάθημα 1)• Φύλλο εργασίας 2 (για το μάθημα 2)• Φύλλο πληροφοριών 2 (για το μάθημα 3)• Φύλλο εργασίας 3 (για το μάθημα 3)
Στόχοι	<p>Ο μαθητής:</p> <ul style="list-style-type: none">• Να γνωρίσει τις εξισώσεις για την επιφάνεια και τον όγκο του κύβου, του κυβοειδούς, του κυλίνδρου, της τετραγωνικής πυραμίδας, του κώνου και της σφαίρας• Να μπορεί να κατασκευάσει μια λοξή παράλληλη προβολή με δεδομένη γωνία και δεδομένο παράγοντα (συντόμευση) ενός κύβου και ενός κυβοειδούς
Σημειώσεις σχετικά με την εργασία με μετανάστες μαθητές	<ul style="list-style-type: none">• Για την 4η εργασία, οι μαθητές (μετανάστες και μη) θα σκεφτούν ένα τυπικό αντικείμενο της χώρας καταγωγής τους (ή της οικογένειάς τους), το οποίο θα έχει ένα βασικό γεωμετρικό σχήμα. Οι μαθητές μπορούν να εξηγήσουν εν συντομία τι είναι αυτό το αντικείμενο ή γιατί επέλεξαν αυτό το συγκεκριμένο αντικείμενο

Σχέδιο μαθήματος:

Μάθημα 1 (50 λεπτά)

Ώρα	Μέθοδος	Περιεχόμενο και σχόλια
περίπου 30 λεπτά	Εργασία σε μικρές ομάδες και στη συνέχεια παρουσίαση των αποτελεσμάτων σε όλη την τάξη	Επανάληψη ιδιοτήτων γεωμετρικών στερεών. έρευνα σχετικά με πραγματικά κτίρια (διαδίκτυο). Γίνεται σύνδεση με τα μαθηματικά (φύλλο εργασίας 1).
περίπου 20 λεπτά	Παρουσίαση και επικοινωνία Εκπαιδευτικού-μαθητή	Ο/η εκπαιδευτικός εξηγεί τη διαδικασία κατασκευής μιας πλάγιας παράλληλης προβολής, καθώς και τις εξισώσεις για την επιφάνεια και τον όγκο ενός κύβου και ενός κυβοειδούς, χρησιμοποιώντας το φύλλο πληροφοριών 1. Οι μαθητές μπορούν να κάνουν ερωτήσεις.

Μάθημα 2 (50 λεπτά)

Ώρα	Μέθοδος	Περιεχόμενο και σχόλια
περίπου 20 λεπτά	Εργασία σε όλη την τάξη, επικοινωνία Εκπαιδευτικού-μαθητή	Επίλυση της εργασίας 2 (δάσκαλος, μαζί με όλη την τάξη).
περίπου 30 λεπτά	Εργασία συνεργατικά, εργασία στην ολομέλεια της τάξης, συζήτηση	Επίλυση της εργασίας 3 (σε ζεύγη), στη συνέχεια έλεγχος λύσεων σε ολόκληρη την τάξη. Συζήτηση σχετικά με τα "τυπικά αντικείμενα" που επιλέχθηκαν στην εργασία 3β).

Εργασία για το σπίτι: Κάθε μαθητής πρέπει να σκεφτεί ένα τυπικό αντικείμενο της χώρας καταγωγής του (ή της οικογένειάς του) που αναπαριστά ένα γεωμετρικό σχήμα. Θα πρέπει επίσης να ανακαλύψουν τις διαστάσεις αυτού του αντικειμένου (π.χ. μέσω του διαδικτύου ή μετρώντας το αντικείμενο στο σπίτι· αν αυτό δεν είναι δυνατό, οι μαθητές θα πρέπει να εφεύρουν ρεαλιστικές μετρήσεις). Οι μαθητές είναι ευπρόσδεκτοι να τραβήξουν μια φωτογραφία του αντικειμένου ή ακόμα και να φέρουν τα επιλεγμένα αντικείμενα στην τάξη.

Μάθημα 3 (50 λεπτά)

Ώρα	Μέθοδος	Περιεχόμενο και σχόλια
περίπου 20 λεπτά	Παρουσίαση και επικοινωνία Εκπαιδευτικού-μαθητή	Ο/η εκπαιδευτικός εξηγεί τις εξισώσεις για την επιφάνεια και τον όγκο του κυλίνδρου, της τετραγωνικής πυραμίδας, του κώνου και της σφαίρας, χρησιμοποιώντας το φύλλο πληροφοριών 2. Οι μαθητές μπορούν να κάνουν ερωτήσεις.
περίπου 30 λεπτά	Εργασία συνεργατικά, εργασία στην ολομέλεια της τάξης	Οι μαθητές εργάζονται στην εργασία 4 σε συνεργατική εργασία (2 μαθητές), στη συνέχεια παρουσιάζουν τα αποτελέσματά τους σε όλη την τάξη (εάν οι μαθητές χρειάζονται περισσότερο χρόνο για την εργασία, τότε η παρουσίαση των αποτελεσμάτων μπορεί επίσης να πραγματοποιηθεί στο επόμενο μάθημα).

Φύλλο εργασίας 1

Δραστηριότητα 1 (εργασία σε μικρές ομάδες, στη συνέχεια παρουσίαση των αποτελεσμάτων σε όλη την τάξη):

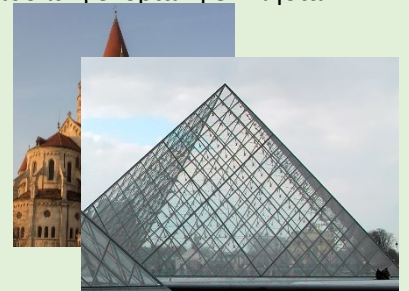
Κάθε μαθητής της ομάδας σκέφτεται ένα κτίριο/αξιοθέατο από τη χώρα προέλευσής του που περιέχει γεωμετρικά στερεά! Τα γεωμετρικά στερεά πρέπει επίσης να ονομαστούν! Επιτρέπεται η χρήση του διαδικτύου! Κάθε μαθητής θα πρέπει επίσης να εξηγήσει εν συντομία το κτίριο "του" σε 2-3 προτάσεις.

Εάν όλοι (ή οι περισσότεροι) μαθητές έχουν την ίδια χώρα καταγωγής, μπορούν να επιλέξουν χώρες όπου επισκέφθηκαν ή όπου ζουν μέλη της οικογένειάς τους.

Παραδείγματα:

- a) Εκκλησία "Άγιος Φραγκίσκος της Ασίζης" στη Βιέννη (οι κορυφές των πύργων είναι κώνοι)
Βρίσκεται στην Mexikorplatz (πλατεία του Μεξικού), ακριβώς στον ποταμό Δούναβη.
Ο θεμέλιος λίθος τέθηκε στην 50ή επέτειο της
ενθρόνιση του αυτοκράτορα Φραγκίσκου Ιωσήφ. Είναι μια ρωμαιοκαθολική ενοριακή εκκλησία.

- b) Γυάλινη πυραμίδα στο Παρίσι
Χρησιμεύει ως η κύρια είσοδος στο Μουσείο του Λούβρου στη
Γαλλική πρωτεύουσα το Παρίσι.



Ενημερωτικό δελτίο 1

Η εστίαση τώρα είναι στη δημιουργία μιας πλάγιας παράλληλης προβολής και στον υπολογισμό της επιφάνειας και του όγκου ενός κύβου και ενός κυβοειδούς:

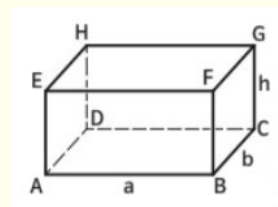
Ένα σχέδιο δείχνει πάντα ένα στερεό από μία μόνο γωνία. Το στερεό, δηλαδή ένα χωρικό αντικείμενο τριών διαστάσεων ή γεωμετρικό στερεό, απεικονίζεται ως επίπεδη φιγούρα στο χαρτί σχεδίασης. Για να επιτευχθεί αυτό το αποτέλεσμα στο σχέδιο, χρησιμοποιείται συχνά η λεγόμενη πλάγια παράλληλη προβολή. Σε αυτόν τον τύπο αναπαράστασης, οι μεμονωμένες επιφάνειες και οι άκρες του στερεού έχουν διαφορετικά σχήματα ή μήκη.

Επεξήγηση: Η μπροστινή και η πίσω επιφάνεια σχεδιάζονται σε πραγματικό μέγεθος. Οι πλευρικές ακμές που τρέχουν διαγώνια προς τα πίσω συντομεύονται. Δουλεύουμε με τη γωνία παραμόρφωσης $\alpha = 45^\circ$ (γωνία στην οποία σχεδιάζεται το πλάγιο άκρο) και τον συντελεστή σμίκρυνσης, που ονομάζεται επίσης σμίκρυνση, $v = 0.5$ (δηλαδή συντόμευση κατά το ήμισυ, αυτός είναι ο παράγοντας με τον οποίο πολλαπλασιάζεται το μήκος της λοξής άκρης). Οι αόρατες ακμές σχεδιάζονται ως διακεκομμένες γραμμές. Αυτό δίνει μια αναπαράσταση που ανταποκρίνεται καλά στην πραγματικότητα.

Για κυβοειδές με επιφάνεια βάσης G ισχύουν τα εξής:

$$\text{Επιφάνεια } A = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot h + 2 \cdot b \cdot h = 2 \cdot G + M$$

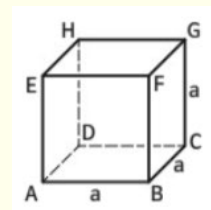
$$\text{Όγκος: } V = a \cdot b \cdot h = G \cdot h$$



Για έναν **κύβο** με επιφάνεια βάσης G ισχύουν τα εξής:

$$\text{Επιφάνεια } A = 6 \cdot a \cdot a$$

$$\text{Όγκος: } V = a \cdot a \cdot a = G \cdot a$$



Φύλλο εργασίας 2

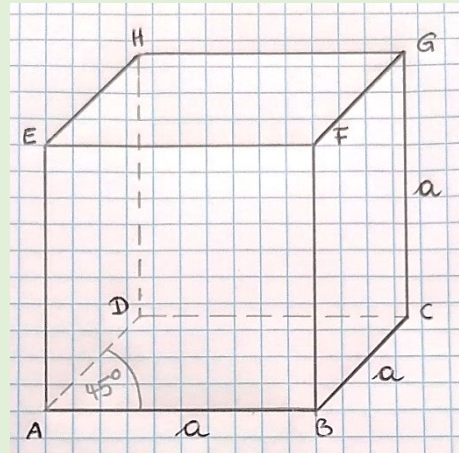
Δραστηριότητα 2 (εργασία σε όλη την τάξη):

Κατασκευάστε την πλάγια παράλληλη προβολή ενός κύβου με μήκος πλευράς $a = 5\text{cm}$

Υπολογίστε την επιφάνεια καθώς και τον όγκο του κύβου

$$\text{Επιφάνεια } A = 6 \cdot a \cdot a = 6 \cdot 5 \cdot 5 = 150\text{cm}^2$$

$$\text{Τόμος: } V = a \cdot a \cdot a = G \cdot a = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125\text{cm}^3$$



Εργασία 3 (εργασία συνεργάτη):

- a) Κυβοειδές: Κατασκευάστε την πλάγια παράλληλη προβολή ενός κυβοειδούς με πλευρές $a = 7\text{ cm}$ $b = 4\text{ cm}$ $c = 3\text{ cm}$ χρησιμοποιώντας τη γωνία $\alpha = 45^\circ$ και την συντόμευση $v = 0.5$

Υπολογίστε την επιφάνεια και τον όγκο αυτού του κυβοειδούς!

Σκεφτείτε 2 αντικείμενα από την καθημερινή ζωή που θα μπορούσαν να έχουν περίπου το σχήμα αυτού του κυβοειδούς!

- b) Κύβος: Κατασκευάστε την λοξή παράλληλη προβολή ενός κύβου με μήκος πλευράς $a = 7\text{cm}$. Χρήση $\alpha = 45^\circ$ και $v = 0.5$

Υπολογίστε την επιφάνεια και τον όγκο αυτού του κύβου!

Σκεφτείτε 2 αντικείμενα από την καθημερινή ζωή που θα μπορούσαν να έχουν περίπου το σχήμα αυτού του κύβου!

Ενημερωτικό δελτίο 2

Για την περαιτέρω εμβάθυνση του θέματος των γεωμετρικών στερεών, συζητούνται τώρα λεπτομερέστερα οι επιφάνειες και οι όγκοι των ακόλουθων στερεών: Κύλινδρος, τετραγωνική πυραμίδα, κώνος, σφαίρα.

Σημείωση: Οι μαθητές είναι ήδη εξοικειωμένοι με τις ιδιότητες των γεωμετρικών στερεών. Οι μαθητές είναι επίσης εξοικειωμένοι με τους όρους $h_a, s, \dots$. Χρησιμοποιώντας μια μορφή αντιστοίχισης, οι μαθητές θα πρέπει να επεξεργαστούν μόνοι τους πώς μοιάζουν οι αντίστοιχες εξισώσεις.

- Κύλινδρος:

Επιφάνεια:

Όγκος:

$$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$$

$$A = a^2 + 2 \cdot a \cdot h_a$$

- Τετράγωνη πυραμίδα:

Επιφάνεια:

Όγκος:

$$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$$

$$A = 2 \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h$$

- Κώνος:

Επιφάνεια:

Όγκος:

$$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$$

$$A = 4 \cdot r^2 \cdot \pi$$

- Σφαίρα:

Επιφάνεια:

Όγκος:

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h$$

$$A = r^2 \cdot \pi + r \cdot \pi \cdot s$$

Φύλλο εργασίας 3

Δραστηριότητα 4 (εργασία σε μικρές ομάδες, στη συνέχεια παρουσίαση των αποτελεσμάτων σε όλη την τάξη):

Κάθε μαθητής πρέπει να σκεφτεί ένα τυπικό αντικείμενο της χώρας καταγωγής του (ή της οικογένειάς του) που αντιπροσωπεύει ένα γεωμετρικό σχήμα (αυτή ήταν η εργασία). Ο παρακάτω πίνακας πρέπει να συμπληρωθεί στη μικρή ομάδα. Τα αποτελέσματα θα πρέπει στη συνέχεια να παρουσιαστούν στον πίνακα σε όλη την τάξη. Οι μαθητές είναι ευπρόσδεκτοι να πάρουν τα επιλεγμένα αντικείμενα στην τάξη και (αν είναι βρώσιμα) ακόμη και να τα δοκιμάσουν.

Η πρώτη γραμμή δείχνει ένα παράδειγμα για ένα τυπικό αντικείμενο από την Αυστρία.

Αντικείμενο	Στερεός	Διαστάσεις	Αριθμός Κορυφές	Αριθμός ακμών	Αριθμός Πρόσωπα	Επιφάνεια	Όγκος
 Manner-Schnitten (τυπικές βιεννέζικες γκοφρέτες)	Κυβοειδούς	$a = 97$ $b = 84$ $h = 15$ (mm)	8	12	6	$A =$ $= 2 \cdot 97 \cdot 84$ $+$ $2 \cdot 97 \cdot 15$ $+$ $2 \cdot 84 \cdot 15$ $= 21726 \text{ mm}^2$	$V = 97 \cdot 84 \cdot 15$ $= 122220 \text{ mm}^3$ $= 122.22 \text{ cm}^3$

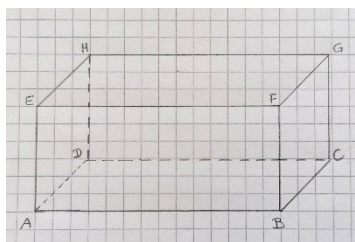
Λύσεις

Εργασία 3:

a)

$$A = 2 \cdot 7 \cdot 4 + 2 \cdot 7 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 3 = 122 \text{ cm}^2$$

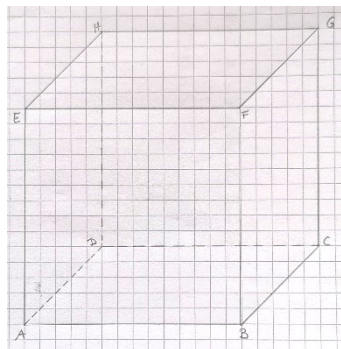
$$V = 7 \cdot 4 \cdot 3 = 84 \text{ cm}^3$$



b)

$$A = 6 \cdot 7^2 = 294 \text{ cm}^2$$

$$V = 7^3 = 343 \text{ cm}^3$$



Ενημερωτικό δελτίο 2:

- Κύλινδρος:

Επιφάνεια:

$$A = 2 \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h$$

Όγκος:

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h$$

- Τετράγωνη πυραμίδα:

Επιφάνεια:

$$A = a^2 + 2 \cdot a \cdot h_a$$

Όγκος:

$$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$$

- Κώνος:

Επιφάνεια:

$$A = r^2 \cdot \pi + r \cdot \pi \cdot s$$

Όγκος:

$$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$$

- Σφαίρα

Επιφάνεια:

$$A = 4 \cdot r^2 \cdot \pi$$

Όγκος:

$$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$$