Co-funded by the European Union

Περιγραφή Ενότητας

Τίτλος	**Πράσινη Γεωμετρία 2 (Μαθηματικά σε παρτέρι λουλουδιών)**
Ηλικία μαθητών/τάξη	17-18 ετών
Διάρκεια ενότητας	1 x 50 λεπτά (έως 2 x 50 λεπτά)
Μαθηματικό θέμα	Εφαρμογές διαφόρισης και ολοκλήρωσης
Προαπαιτούμενες γνώσεις	• Ορισμός της εξίσωσης μιας πολυωνυμικής συνάρτησης με δεδομένες τιμές συνάρτησης • Διαφόριση πολυωνυμικών συναρτήσεων • Ολοκλήρωση πολυωνυμικών συναρτήσεων • Ερμηνεία του ολοκληρώματος ως περιοχής εμβαδού κάτω από το γράφημα
Απαιτούμενα υλικά	• Φύλλο εργασίας 1
Στόχοι	Ο μαθητής: • μπορεί να εφαρμόσει γνώσεις σχετικά με τις ιδιότητες των πολυωνυμικών συναρτήσεων σε πρακτικές, πραγματικές καταστάσεις • μπορεί να χρησιμοποιήσει πολυωνυμικές συναρτήσεις για να μοντελοποιήσει αντικείμενα πραγματικής ζωής • μπορεί να εφαρμόσει διαφόριση και ολοκλήρωση σε πραγματικά περιβάλλοντα
Σημειώσεις σχετικά με την εργασία με μετανάστες μαθητές	• Οι μαθητές (ιδιαίτερα οι μετανάστες μαθητές) μπορούν να φέρουν φωτογραφίες από παρτέρια σε κήπους ή πάρκα από τις χώρες καταγωγής τους

Η υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής για την παραγωγή αυτής της έκδοσης δεν συνιστά έγκριση του περιεχομένου που αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις των συγγραφέων και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

Σχέδιο μαθήματος:

Μάθημα 1 (50 λεπτά)

Ώρα	Μέθοδος	Περιεχόμενο και σχόλια
περίπου 5 λεπτά	Παρουσίαση και Επικοινωνία εκπαιδευτικού-μαθητή	Ο/η εκπαιδευτικός παρακινεί τους μαθητές για το θέμα του μαθήματος και εξηγεί τη σημασία του στην καθημερινή ζωή.
περίπου 35 λεπτά	Ομαδοσυνεργατική εργασία (σε μικρές ομάδες)	Οι μαθητές επιλύουν τις εργασίες στο φύλλο εργασίας σε ομάδες των δύο ή τριών. /η εκπαιδευτικός περιφέρεται στην τάξη και βοηθά με τυχόν προβλήματα που προκύπτουν.
περίπου 10 λεπτά	Επικοινωνία εκπαιδευτικού-μαθητή	Σύγκριση των αποτελεσμάτων

Εάν η τάξη είναι πολύ αφοσιωμένη και ενδιαφέρεται για τις εργασίες του μαθήματος 1, οι μαθητές /τριες μπορούν να εργαστούν σε μια πρόσθετη εργασία (Εργασία 4) είτε στο τέλος του μαθήματος 1 (εφόσον το επιτρέπει ο χρόνος), είτε σε ένα δεύτερο μάθημα.

Φύλλο εργασίας 1 – Μαθηματικά στο παρτέρι

Πρόκειται να δημιουργηθεί ένα παρτέρι σε έναν ορθογώνιο κήπο.

Το σχήμα του παρτεριού περιγράφεται από μια συνάρτηση f , όπου x είναι το πλάτος του λουλουδιού σε μέτρα και f(x) είναι το μήκος του παρτεριού σε μέτρα.

Εργασία 1:

Ένας κηπουρός τοποθετεί το παρτέρι ενός πελάτη με τέτοιο τρόπο ώστε το παρτέρι να ξεκινά από τις άκρες του κήπου και να φτάνει στο μέγιστο μήκος του στο κέντρο του κήπου. Ο πελάτης σημειώνει ότι το παρτέρι πρέπει να έχει μέγιστο «μήκος» τριών μέτρων. Επιπλέον, είναι γνωστό ότι η συνάρτηση f ορίζεται μόνο για $0 \leq x \leq 10$.

a) Κάντε ένα σκίτσο του κήπου με το παρτέρι και ονομάστε το.

Χώρος για το σκίτσο σας:

b) Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω πληροφορίες, καθορίστε τον όρο αναπαράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f που περιγράφει το σχήμα του παρτεριού στον κήπο. Χρησιμοποιήστε τις ακόλουθες ιδιότητες για να το κάνετε αυτό.

	Περιγραφή με λέξεις	Μαθηματική περιγραφή
1)	Το παρτέρι ξεκινά από τις άκρες του κήπου. Αυτές οι άκρες βρίσκονται σε x= _____ και x= _____.	I:_____ II: _____
2)	Το παρτέρι έχει το μέγιστο μήκος του στο κέντρο του κήπου. Το κέντρο του κήπου βρίσκεται στο $x =$_____	III: _____
3)	Ο πελάτης σημειώνει ότι το παρτέρι πρέπει να έχει μέγιστο «μήκος» τριών μέτρων.	IV: _____

Πρώτον, εξετάστε το βαθμό της πολυωνυμικής λειτουργίας που είναι καλύτερο και ευκολότερο για αυτό το σχέδιο του λουλουδιού.

Πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού ____: *Αυτό δίνεται γενικά από:* $f(x) =$_____

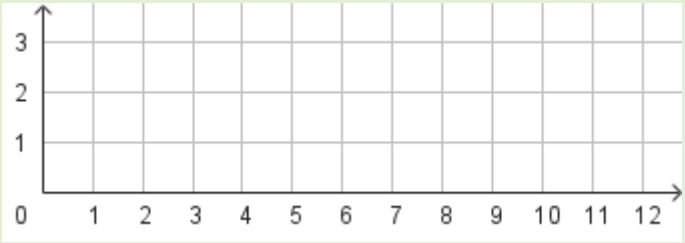
Βρείτε τη συνάρτηση πολυωνύμου που περιγράφει το παρτέρι. Γράψτε μια κατανοητή περιγραφή πώς πέτυχατε το αποτέλεσμά σας στον παρακάτω χώρο.

Η πολυωνυμική συνάρτηση δίνεται από: $f(x) =$

Εργασία 2:

Σχεδιάστε ξανά την πολυωνυμική συνάρτηση που περιγράφει το
παρτέρι στο δεδομένο σύστημα συντεταγμένων.

Εκτιμήστε την πραγματική επιφάνεια του παρτεριού χρησιμοποιώντας ανω και κάτω αθροίσματα (με 5 ίσα διαστήματα).



Εργασία 3:

Προσδιορίστε την πραγματική συνολική επιφάνεια του παρτεριού στον κήπο.

Φύλλο εργασίας 1 – λύσεις

Ένα παρτέρι πρόκειται να δημιουργηθεί σε έναν ορθογώνιο κήπο.

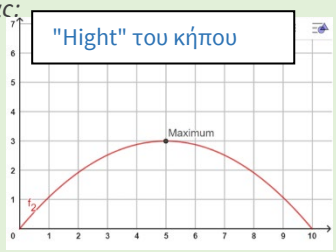
Το σχήμα του παρτεριού περιγράφεται από μια συνάρτηση f , όπου x είναι το πλάτος του παρτεριού σε μέτρα x και f(x) είναι το μήκος του παρτεριού σε μέτρα.

Εργασία 1:

Ένας κηπουρός τοποθετεί το παρτέρι ενός πελάτη με τέτοιο τρόπο ώστε το παρτέρι να ξεκινά από τις άκρες του κήπου και να φτάνει στο μέγιστο μήκος του στο κέντρο του κήπου. Ο πελάτης σημειώνει ότι το παρτέρι πρέπει να έχει μέγιστο «μήκος» τριών μέτρων. Επιπλέον, είναι γνωστό ότι η συνάρτηση f ορίζεται μόνο για $0 \leq x \leq 10$.

c) Κάντε ένα σκίτσο του κήπου με το παρτέρι και ονομάστε το.

Χώρος για το σκίτσο σας:



d) Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω πληροφορίες, καθορίστε τον όρο αναπαράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f που περιγράφει το σχήμα του παρτεριού στον κήπο. Χρησιμοποιήστε τις ακόλουθες ιδιότητες για να το κάνετε αυτό.

	Περιγραφή με λέξεις	Μαθηματική περιγραφή
1)	Το παρτέρι ξεκινά από τις άκρες του κήπου. Αυτές οι άκρες βρίσκονται στο και .$x = 0$ *και* $x = 10$	I: $f(0) = 0$ II: $f(10) = 0$
2)	Το παρτέρι έχει το μέγιστο μήκος του στο κέντρο του κήπου. Το κέντρο του κήπου βρίσκεται στο .$x = 5$	III: $f'(5) = 0$
3)	Ο πελάτης σημειώνει ότι το παρτέρι πρέπει να έχει μέγιστο «μήκος» τριών μέτρων.	IV: $f(5) = 3$

Πρώτον, εξετάστε το βαθμό της πολυωνυμικής συνάρτησης που είναι καλύτερο και ευκολότερο για αυτό το παρετέρι.

Πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού 2 : *Αυτό δίνεται γενικά από:* $f(x) = ax^2 + bx + c$

Βρείτε την πολυωνυμική συνάρτηση που περιγράφει το παρτέρι. Γράψτε μια κατανοητή περιγραφή πώς πετύχατε το αποτέλεσμά σας στον παρακάτω χώρο.

$f(x) = ax^2 + bx + c$ und $f'(x) = 2ax + b$

I: $f(0) = 0$ $\quad a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 0 \quad \rightarrow \boldsymbol{c = 0}$
II: $f(10) = 0$ $\quad a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c = 0 \quad \rightarrow 100a + 10b = 0$
III: $f'(5) = 0$ $\quad 2 \cdot a \cdot 5 + b = 0 \quad \rightarrow 10a + b = 0$
IV: $f(5) = 3$ $\quad a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c = 3 \quad \rightarrow 25a + 5b = 3$

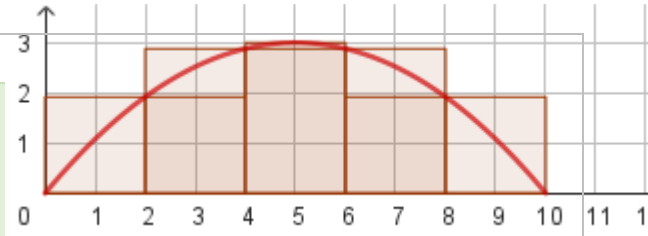
Από τις εξισώσεις III και IV παίρνει κανείς το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων:

$III: \quad 10a + b = 0 \quad | \cdot (-5)$
$IV: \quad 25a + 5b = 3$

$III: \quad -50a - 5b = 0$
$IV: \quad 25a + 5b = 3$

$-25a = 3 \quad | : (-25) \quad \rightarrow \boldsymbol{a = -\frac{3}{25}}$

$10a + b = 0 \quad | - b \quad \rightarrow \boldsymbol{b = \frac{30}{25} = \frac{6}{5}}$
$10a = -b$



Εργασία 2:

Σχεδιάστε ξανά την πολυωνυμική συνάρτηση που περιγράφει το παρτέρι στο δεδομένο σύστημα συντεταγμένων.

Εκτιμήστε την πραγματική επιφάνεια του παρτεριού χρησιμοποιώντας ανώτερα και χαμηλότερα αθροίσματα (με 5 ίσα διαστήματα).

Για την εκτίμηση της περιοχής με τη βοήθεια ανώτερων και κατώτερων αθροισμάτων, απαιτούνται ορισμένες τιμές συνάρτησης, οι τιμές των οποίων δίνονται στον ακόλουθο πίνακα τιμών (στρογγυλοποιημένες).

x	0	2	4	5	6	8	10
$f(x)$	0	1.92	2.88	3	2.88	1.92	0

Χαμηλότερο άθροισμα: $L_5 = 2 \cdot [f(0) + f(2) + f(4) + f(8) + f(10)]$

$L_5 \approx 13.44$

Ανώτερο άθροισμα: $U_5 = 2 \cdot [f(2) + f(4) + f(5) + f(6) + f(8)]$

$U_5 \approx 25.2$

Κάποιος παίρνει: $13.44\ m^2 < \text{actual area} < 25.2\ m^2$

Εργασία 3:

Προσδιορίστε την πραγματική συνολική επιφάνεια του παρτεριού στον κήπο.

$$A = \int_0^{10} f(x)\,dx = \int_0^{10} \left(-\frac{3}{25}x^2 + \frac{6}{5}x\right)dx = \left(-\frac{3x^3}{25 \cdot 3} + \frac{6x^2}{5 \cdot 2}\right)\Bigg|_0^{10}$$

$$= \left(-\frac{3 \cdot 10^3}{25 \cdot 3} + \frac{6 \cdot 10^2}{5 \cdot 2}\right) - \left(-\frac{3 \cdot 0^3}{25 \cdot 3} + \frac{6 \cdot 0^2}{5 \cdot 2}\right) = (-40 + 60) = 20$$

Η πραγματική συνολική επιφάνεια του παρτεριού είναι 20m².

Πρόσθετη εργασία

★ **Εργασία 4**:

Προκειμένου να γίνει η καλύτερη δυνατή χρήση του κήπου, ο πελάτης αναρωτιέται ποιο είναι το βέλτιστο Πλάτος. Το οικόπεδο πρέπει να μεγιστοποιεί τη συνολική επιφάνεια των παρτεριών στον κήπο. Προσδιορίστε το βέλτιστο πλάτος x και περιγράψτε πώς το κάνατε με κατανοητό τρόπο.